

**БИБЛИОТЕЧКА  
ПРОГРАММИСТА**

Г. М. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ,  
В. Л. АРЛАЗАРОВ, М. В. ДОНСКОЙ

# Программирование игр



БИБЛИОТЕЧКА  
ПРОГРАММИСТА

---

Г. М. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ,  
В. Л. АРЛАЗАРОВ, М. В. ДОНСКОЙ

# ПРОГРАММИРОВАНИЕ ИГР

Под редакцией Г. М. АДЕЛЬСОНА-ВЕЛЬСКОГО



МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1978

**Программирование игр.** Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л., Донской М. В. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978.

В книге рассматриваются на современном уровне теоретические и практические аспекты игрового программирования с точки зрения сокращения перебора. Она снабжена большим количеством материала, иллюстрирующего основные положения на примерах различных игр, таких, как шахматы, шашки и др. Рассматриваются пути развития игрового программирования. Обсуждаются трудности, возникающие при составлении игровой программы, и способы их преодоления.

Книга представляет интерес для широкого круга читателей, особенно для специалистов в области системного программирования.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	4
<b>Глава 1. Игры двух противников с полной информацией и перебор позиций . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Дерево игры, оценка позиции и лучший ход . . . . .	11
§ 2. Обход позиций игры для определения оценки начальной позиции . . . . .	21
§ 3. О количестве позиций, которые рассматриваются при определении оценки начальной позиции и лучшего хода . . . . .	36
<b>Глава 2. Эвристические методы игрового программирования . . . . .</b>	<b>51</b>
§ 1. Ограничение глубины перебора и оценочные функции . . . . .	51
§ 2. О порядке перебора позиций дерева игры . . . . .	63
§ 3. Построение моделей игры . . . . .	82
§ 4. Семантические модели . . . . .	95
<b>Глава 3. Метод аналогий . . . . .</b>	<b>109</b>
§ 1. Одинаковые ходы в разных позициях . . . . .	109
§ 2. Аксиомы влияния и некоторые возможности сокращения перебора . . . . .	121
§ 3. Разложение веток и его использование для сокращения обхода . . . . .	139
§ 4. Конструктивное определение отношения влияния для некоторых игр . . . . .	160
§ 5. Алгоритмы, основанные на использовании влияния . . . . .	178
<b>Глава 4. Игровое программирование и теория вероятностей . . . . .</b>	<b>193</b>
§ 1. Вероятностные модели игры двух противников . . . . .	193
§ 2. Построение моделей и определение способа вычисления модельных оценок на основе вероятностных предположений . . . . .	213
§ 3. Несколько замечаний о правомерности вероятностного подхода . . . . .	228
<b>Приложение. Краткий обзор работ по программированию игр . . . . .</b>	<b>232</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>243</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>251</b>
<b>Список обозначений . . . . .</b>	<b>254</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Техникам, экономистам, специалистам по организации производства и многим другим часто требуется найти элемент конечного множества, обладающий заданными свойствами (если такой элемент существует). Эта задача в принципе может быть решена при помощи перебора. Однако укоренилось мнение, что такая принципиальная возможность имеет только теоретическое значение, так как трудоемкость перебора слишком велика. Между тем, любой общий метод, в том числе и метод перебора, может оказаться как хорошим, так и плохим. Все зависит от конкретной задачи и способов реализации.

Если нужно с точностью до 0,1 найти корень уравнения  $x^4 + x^3 - 1 = 0$  на отрезке  $(0, 1)$ , то, вероятно, лучше вычислить значения левой части этого уравнения при  $x = 0, 0, 1, \dots, 1$ , чем, воспользовавшись точным методом Феррари, сначала свести его к уравнению  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  при помощи подстановки  $x = y - 1/4$ , преобразовать это уравнение к решаемому при помощи точных формул уравнению

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - 2\alpha\left(y - \frac{a}{4\alpha}\right)^2 = 0,$$

где  $\alpha$  — корень кубического уравнения

$$q^2 - 8\alpha\left(\alpha p + \alpha^2 + \frac{p^2}{4} - r\right),$$

последнее привести к виду  $\beta^3 + p'\beta + q' = 0$  при помощи подстановки  $\alpha = \beta - p/3$  и, наконец, воспользоваться формулой Кардана

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}}.$$

В сущности, перебор — это решение задач, возникающих из заданной, когда значение некоторого искомого параметра фиксируется различным образом, и выбор того из рассмотренных значений, который дает наиболее подходящее решение. Часто каждая из рассматриваемых задач с фиксированным значением данного параметра в свою очередь решается переборными методами. Тогда говорят о многоуровневом или иерархически устроенном переборе. Основываясь на столь общем определении перебора, можно дать лишь тривиальные рекомендации о способах его выполнения (однако и они иногда полезны). К счастью, рассматриваемые задачи, кроме возможности их решения методами перебора, обычно имеют и другие характерные общие особенности. Это позволяет создавать, изучать и применять общие методы перебора.

Цель книги — на конкретном примере задач о программировании игр двух противников с полной информацией продемонстрировать некоторые из этих методов и показать читателю, что следует не столько бояться перебора, сколько пользоваться им разумно, правильно оценивая размеры «бедствия» и используя разнообразные возможности его сокращения. Задачи игрового программирования как будто специально созданы для исследования перебора и, вообще, методов многошаговых решений. Четкость и сравнительная простота правил поведения и оценки результатов, возможность удобного экспериментального сравнения различных алгоритмов, в том числе экспериментов с участием человека,

принимającego решения не формальными способами, делают их подходящими моделями для разработки и проверки различных подходов к переборному решению задач.

Иерархический перебор лежит в основе любого естественного способа выбора хода в позициях игры. «Если я пойду так, то возникнет позиция, где у меня будут вот такие возможности, но противник может ответить так-то и так-то...» — типичное обоснование выбора хода. Ясно, что оно подразумевает перебор. Однако как будет показано в первой главе, даже так называемый «полный перебор» вовсе не требует изучения всех потенциально возможных позиций, возникающих после допустимых правилами игры последовательностей ходов. Возможности сокращения перебора и способы их реализации — это основные вопросы, рассматриваемые в книге.

Мы писали книгу о программировании игр, т. е. предполагали, что читатель захочет сам написать программу, играющую в какую-нибудь серьезную или несерьезную игру, хотя бы для того, чтобы яснее представить себе идеи и методы, о которых в ней говорится. Однако мы нигде не рассматриваем вопросов техники программирования, хотя именно при создании играющих программ ее значение очень велико. Тем не менее не существует специфической техники игрового программирования. Тот факт, что многие технические приемы впервые были придуманы при создании игровых программ, не противоречит этому утверждению. Впоследствии эти приемы получили широкое распространение и использовались при создании программ самого разнообразного назначения. Большое количество таких приемов, по-видимому, говорит о том, что работали неплохие программисты, а решение задач, которые они ставили перед собой, находилось на пределе возможностей их машин.

В книге исследуются некоторые антагонистические игры двух противников, называемых белыми и черными. Без ограничения общности можно считать, что это игры с нулевой суммой. Рассматриваются игры, задаваемые конечным набором позиций, в каждой из которых известны допустимые правилами ходы, т. е. решения противников. Если эти решения приняты, то возникает новая позиция, однозначно ими определяемая. Некоторые позиции являются заключительными: в них никаких решений принимать уже нельзя, зато известен результат — выигрыш одного противника и равный ему проигрыш другого. Если же в результате решений обоих противников возникнет незаключительная позиция, то противникам снова нужно выбирать ходы.

Однако мы изучаем более узкий класс игр — игры с полной информацией. В каждой незаключительной позиции такой игры задано, кто из противников должен принять решение — сделать ход. Следовательно, принимающий решение противник точно знает, к какой позиции это решение приведет. Позиции в игре двух противников с полной информацией бывают трех типов: с ходом белых, с ходом черных и заключительные \*).

Каждая игра начинается с некоторой позиции, называемой в дальнейшем начальной. В одних играх, например, карточных, начальные позиции бывают различными (чаще всего они определяются при помощи некоторого случайного процесса). В других, как, например, шахматы, начальная позиция зафиксирована раз и навсегда. Впрочем и для шахматиста предметом исследования обычно является не эта абсолютно на-

---

\*) Можно определить понятие игры нескольких противников с полной информацией и перенести или соответственным образом трансформировать некоторые излагаемые в книге результаты. Мы заниматься этим не будем.

чальная позиция, а некоторая возникающая из нее в процессе игры или заданная каким-либо другим способом (задачи, этюды).

Если начальная позиция задана, то можно определить дерево игры. Его вершинам соответствуют позиции, а каждая дуга ведет из позиции, в которой можно сделать некоторый ход, в позицию, возникающую после этого хода. Таким образом, начальной позиции соответствует корень дерева игры. Игру двух противников с полной информацией можно определить формально, задав дерево игры, цвета не конечных вершин (очередь хода в позициях) и оценки, соответствующие заключительным позициям. Такое определение дается в первой главе и широко используется во всей книге. Однако при исследовании конкретных свойств игры мы, по существу, имеем дело с определением игры через ее позиции и ходы.

В первой главе излагается метод граней и оценок ( $\alpha$ ,  $\beta$ -эвристика). Основное внимание в ней уделено теоретическому обоснованию метода, а также оценке минимально необходимого объема перебора при его применении. Отказавшись в нескольких местах от изящных индуктивных доказательств в пользу несколько более громоздких, мы пытались выделить те условия, от которых зависит существование объективной оценки начальной позиции и оптимальных стратегий для каждого противника.

Вторая глава посвящена эвристическим, т. е. не точным, методам выбора хода в рассматриваемых позициях. Особое внимание в ней уделено вопросам обоснования таких методов и обсуждению свойств конкретных игр, которые обеспечивают удовлетворительные результаты при их применении. Следует отметить рассматриваемый в настоящей книге вероятностный подход к обоснованию эвристических методов игрового программирования.

В третьей главе излагается теория принятия решений по аналогии. В основе метода аналогии лежит понятие хода, независимое от позиции, из которой он производится. Таким образом, в различных позициях можно сделать один и тот же ход. Последствия такого хода могут быть различными, но во многих позициях данный ход ведет к примерно одинаковым изменениям. Пусть в некоторой позиции  $B$  ход  $\Psi$  был исследован. Возникает вопрос, какие условия достаточны для того, чтобы оценка этого хода из другой позиции  $C$  была бы такой же, как и из позиции  $B$ . В главе формулируются условия и доказываются их достаточность. Они состоят в том, что последовательность ходов, ведущая из позиции  $B$  в позицию  $C$ , не должна влиять на варианты, определяющие оценку исследуемого хода, т. е. состоять из ходов, так сказать, «не имеющих отношения» к этим вариантам.

В четвертой главе рассматривается подход к программированию игр, основанный на вероятностных предположениях. Такой подход имеет четыре основных аспекта. Первый — методы формулировки элементарных гипотез вероятностного характера и вычисления вероятностей правильного определения оценок позиций и лучших ходов. Второй — методы статистической проверки принятых предположений. Третий — построение более эффективных способов вычисления оценок позиций и выбора лучшего хода на основе анализа вероятностных моделей игры. Четвертый — обоснование вероятностного подхода к программированию игр с полной информацией.

Так как применение вероятностного подхода к программированию игр только начинается, ряд результатов главы следует рассматривать как предварительные, а в некоторых направлениях даже такие результаты еще не получены (статистическая проверка вероятностных предположений, обоснование вероятностного подхода). Тем не менее уже полученные результаты, по

мнению авторов, свидетельствуют о перспективности нового направления программирования игр. Поэтому мы включили эту главу в книгу.

В конце ее дано приложение — краткий обзор работ, связанных с программированием игр, и список литературы. В последний включены также работы, на которые в книге нет ссылок.

Третья и четвертая главы, содержащие новые математические результаты об играх двух противников с полной информацией, независимы между собой. Формально они не связаны и со второй главой, однако мы все же рекомендуем читателю, интересующемуся методом аналогии или вероятностными моделями игр, посмотреть в ней §§ 1, 2.

Так как вопросы, рассматриваемые в книге, имеют прямое отношение к программированию, нам оказалось полезной некоторая символика, взятая из алгоритмических языков (а именно, алгола). Мы используем символ присвоения  $:=$  и знак препинания  $;$ , определяющий конец описания оператора. Когда применение такой символики противоречит правилам русского синтаксиса, мы отдаем предпочтение синтаксису формального языка.

Авторы книги много лет вели (и ведут) работы по созданию программы, играющей в шахматы. Естественно, это повлияло на характер изложения и, особенно, на конкретные примеры, часто шахматные. Однако, за немногими исключениями, мы избегали обсуждения специфически шахматной проблематики. Кроме того, мы являемся убежденными сторонниками того взгляда, что для создания сильной шахматной программы не обязательно хорошо играть в шахматы. Поэтому даже там, где примеры носят чисто шахматный характер, от читателя требуется только самое элементарное знание игры.

## ГЛАВА 1

# ИГРЫ ДВУХ ПРОТИВНИКОВ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И ПЕРЕБОР ПОЗИЦИЙ

### § 1. Дерево игры, оценка позиции и лучший ход

Напомним определение дерева (даем его в индуктивной форме). *Элементами дерева* являются вершины и дуги, т. е. направленные ребра (одна инцидентная ему вершина называется *началом*, а другая — *концом*).

*Деревом* называется:

- а) одна вершина,
  - б) дерево с добавленными вершиной и дугой, начинающейся в старой и кончающейся в новой вершине.
- Если старая вершина обозначена  $A$ , а добавленная  $B$ , то дуга, ведущая из  $A$  в  $B$ , обозначается  $(A, B)$  или  $\vec{B}$  \*).

Легко видеть, что всякое дерево связно (см. рис. 1).

*Корнем дерева* называется вершина, в которую не ведет ни одна дуга. *Концевой* называется вершина, из которой не выходит ни одна дуга. Из определения дерева легко следует, что всякое дерево обладает корнем и притом единственным.

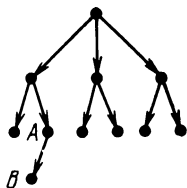


Рис. 1.

---

\*) В теории графов считается, что ребра дерева не имеют направления, т. е. их начала и концы не различаются. Определенный нами объект называется ориентированным деревом (определения дерева и ориентированного дерева можно дать и другими способами). Но так как в книге неориентированные деревья встречаться не будут, термин *ориентированное дерево* всюду заменен на *дерево*.

*Поддеревом дерева*  $\mathfrak{X}$  называется часть его вершин и дуг, если они составляют дерево.

Пусть  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$  — поддеревья дерева  $\mathfrak{X}$  с непустым пересечением  $\mathfrak{D}$ . Тогда  $\mathfrak{D}$  — поддерево дерева  $\mathfrak{X}$ .

Вершина  $B$  называется *подчиненной* вершине  $A$ , если

а)  $B \equiv A$ ,

б)  $B$  — конец дуги, выходящей из вершины, подчиненной  $A$ . Дуги, выходящие из вершин, подчиненных вершине  $A$ , называются *подчиненными* вершине  $A$ .

Совокупность вершин и дуг, подчиненных вершине  $A$ , образует дерево с корнем  $A$ . Это дерево называется  *$A$ -поддеревом* основного дерева.

Если  $A$  — не корень дерева, то  $A$ -поддерево вместе с дугой  $\bar{A}$  называется *открытым  $A$ -поддеревом*.

Если из дерева  $\mathfrak{X}$  выбросить дугу, ведущую в вершину  $A$ , и  $A$ -поддерево, то оставшаяся часть  $\mathfrak{B}$  дерева  $\mathfrak{X}$  есть дерево.

Корень дерева назовем вершиной ранга 0. Если вершина  $A$  имеет ранг  $n$  и существует дуга  $(A, B)$ , то вершине  $B$  припишем ранг  $n+1$ . Таким образом определяется *ранг* каждой вершины дерева.

Пусть  $A$  — вершина дерева и  $B$  — вершина  $A$ -поддерева. *Веткой*  $W(A, B)$  называется последовательность вершин  $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_k = B$  таких, что существуют дуги  $(A_s, A_{s+1})$  ( $s=0, 1, \dots, k-1$ ).

Если ветка дерева  $W(A, B)$  существует, то она единственна.

Пусть каждой вершине дерева поставлен в соответствие цвет — белый или черный, а некоторым конечным вершинам  $F$  — еще и действительные числа  $oc(F)$ . Тогда мы будем называть его *деревом игры двух противников*.

Вершины дерева игры называются *позициями* (концевые — *заключительными* позициями), а его дуги — *ходами*. Ходы из позиций, которым поставлен в соответствие белый (черный) цвет, называются *ходами белых (черных)*. Соответственно сами позиции — *позициями с ходом белых (черных)* \*).

Пусть  $\mathfrak{X}$  — дерево игры, и в его начальной позиции  $A_0$  ход белых. Это значит, что белые должны из всех возможных ходов, выходящих из  $A_0$ , выбрать один. После

---

\*) Дерево игры может быть даже бесконечным, и многие из дальнейших утверждений для таких игр справедливы.

этого хода возникает позиция  $A_1$  — конец выбранной дуги  $(A_0, A_1)$  дерева игры. Если в этой позиции ход черных, то теперь они должны выбрать один из выходящих из  $A_1$  ходов и т. д. Таким образом, когда белые и черные реализуют все свои возможности выбора, возникнет последовательность позиций  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , причем последняя позиция является заключительной и имеет оценку  $\text{оц } A_n$ . Эту последовательность мы будем называть *партией*, а оценку ее заключительной позиции — *результатом партии*. Белые выбирают свои ходы с целью максимизировать ее результат, а черные — с целью минимизировать его. *Оценкой позиции*  $A_0$ , естественно, называют такой результат партии, который и белые, и черные рассчитывают получить. Однако не ясно, почему обе стороны должны рассчитывать на один и тот же результат.

Пусть  $\mathfrak{A}$  — дерево игры. Назовем  $\mathfrak{B}(A)$  *б-усеченным* деревом (относительно  $\mathfrak{A}$ ), если:

1)  $\mathfrak{B}(A)$  получается из  $A$ -поддерева исключением некоторого числа открытых  $B$ -поддеревьев, где  $\bar{B}$  — ход белых.

2) Все заключительные позиции  $\mathfrak{B}(A)$  являются заключительными позициями дерева  $\mathfrak{A}$ , т. е. в результате исключения не появилось новых. Аналогично определяется *ч-усеченное* дерево.

Мы будем употреблять символическое неравенство \*)

$$\text{оц}(A) > M,$$

когда существует конечное б-усеченное дерево с корнем  $A$ , все заключительные позиции которого имеют оценки, и все они больше  $M$ .

Аналогично, если  $M$  больше всех заключительных оценок некоторого ч-усеченного дерева с корнем  $A$ , мы будем писать

$$\text{оц}(A) < M.$$

Для случая нестрогих неравенств изменение определений очевидно.

---

\*) Это неравенство можно пока рассматривать как иероглиф. Ниже будет показано, что в рассматриваемой игре белые могут рассчитывать на результат  $> M$ .

Пусть  $\mathfrak{A}$  — дерево игры и  $\mathfrak{B}$  —  $\beta$ -усеченное дерево. Тогда для каждой позиции  $A \in \mathfrak{B}$  с ходом черных в  $\mathfrak{B}$  содержатся все ходы, выходящие из  $A$  в дереве  $\mathfrak{A}$ , и хотя бы один ход, выходящий из  $A$  в дереве  $\mathfrak{A}$ , если  $A$  — незаключительная позиция с ходом белых. Справедливо также аналогичное утверждение, в котором белый и черный цвета поменялись местами.

**Лемма.** Если  $\mathfrak{B}_1(A)$  —  $\beta$ -усеченное дерево дерева игры  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}_2(A)$  —  $\gamma$ -усеченное дерево, то  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1(A) \cap \mathfrak{B}_2(A)$  — дерево и все его заключительные позиции являются заключительными позициями дерева  $\mathfrak{A}$ .

**Доказательство.**  $\mathfrak{B}$  не пусто, так как содержит корень  $A$  и, следовательно,  $\mathfrak{B}$  — дерево. Пусть  $B \in \mathfrak{B}$  — незаключительная вершина  $\mathfrak{A}$  с ходом белых (черных). Тогда все ходы из  $B$  содержатся в  $\mathfrak{B}_2(A)$  ( $\mathfrak{B}_1(A)$ ) и хотя бы один — в  $\mathfrak{B}_1(A)$  ( $\mathfrak{B}_2(A)$ ), т. е.  $B$  — незаключительная позиция  $\mathfrak{B}$ .

**Теорема о непротиворечивости.** Если  $\mathfrak{A}$  — дерево игры,  $A \in \mathfrak{A}$ , то нельзя одновременно считать верными символические неравенства

$$\text{оц}(A) > M,$$

$$\text{оц}(A) \leq M.$$

**Доказательство.** Символическое неравенство  $\text{оц} A > M$  означает, что существует  $\beta$ -усеченное дерево  $\mathfrak{B}_1$  с начальной позицией  $A$  и оценками всех заключительных позиций  $> M$ ; неравенство  $\text{оц}(A) \leq M$  — что существует  $\gamma$ -усеченное дерево с той же начальной позицией и оценками заключительных позиций  $\leq M$ . Их пересечение содержит хотя бы одну заключительную позицию  $F$ , оценка которой должна быть как  $> M$ , так и  $\leq M$ .

**Определение.** Если для позиции  $A$  дерева игры  $\mathfrak{A}$  одновременно имеют место

$$\text{оц}(A) \geq M,$$

$$\text{оц}(A) \leq M,$$

то число  $M$  называется *оценкой позиции  $A$* .

Во всех дальнейших рассуждениях об усеченных деревьях, позициях и ходах можно изменить цвета и одновременно знаки неравенств. Как правило, это не будет специально оговариваться.

**Лемма.** Пусть  $A$  — позиция дерева игры  $\mathfrak{A}$  с ходом белых и  $\bar{B}$  — выходящий из нее ход, причем  $\text{оц}(B) \geq M$  ( $> M$ ). Тогда  $\text{оц}(A) \geq M$  ( $> M$ ).

**Доказательство.** Так как  $\text{оц}(B) \geq M$ , то существует  $b$ -усеченное дерево  $\mathfrak{B}$  с корнем  $B$ , у которого оценки всех заключительных позиций  $\geq M$ . Тогда  $\mathfrak{B} + A$  (см. рис. 2) также является  $b$ -усеченным поддеревом с корнем  $A$  и теми же заключительными позициями, что у  $\mathfrak{B}$ .

**Лемма.** Пусть  $A$  — позиция дерева игры  $\mathfrak{A}$  с ходом белых и  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  — все ходы из этой позиции. Если

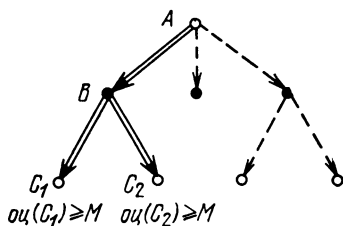


Рис. 2.

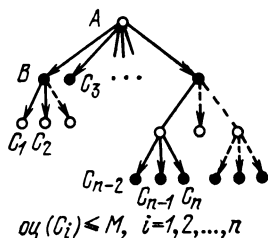


Рис. 3.

для всех позиций  $A_s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) верно, что  $\text{оц}(A_s) \leq M$  ( $< M$ ), то и  $\text{оц}(A) \leq M$ .

**Доказательство.** Каждое неравенство  $\text{оц}(A_s) \leq M$  следует из существования  $c$ -усеченного дерева  $\mathfrak{B}_s$  с корнем  $A_s$  и оценками заключительных позиций  $\leq M$ . Тогда  $A + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \dots + \mathfrak{B}_n$  (см. рис. 3) —  $c$ -усеченное дерево с корнем  $A$ , у которого оценки всех заключительных позиций  $\leq M$ .

**Теорема о переносе оценки.** Пусть  $A$  — вершина дерева игры  $\mathfrak{A}$  с ходом белых (черных),  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k$  — все ходы из нее. Если все вершины  $A_s$  ( $s=1, 2, \dots, k$ ) имеют оценку  $\text{оц}(A_s)$ , то вершина  $A$  имеет оценку  $\text{оц}(A)$ , равную  $\max_{s=1, 2, \dots, k} \text{оц}(A_s)$  (соответственно  $\text{оц}(A) = \min_{s=1, 2, \dots, k} \text{оц}(A_s)$ ).

**Теорема существования оценки.** Если  $\mathfrak{A}$  — конечное дерево игры, и все его заключительные позиции имеют оценку, то и каждая его позиция  $A$  имеет оценку. Эта оценка полностью определяется  $A$ -поддеревом.

Доказательство. Все позиции максимального ранга  $A$ -поддерева дерева игры  $\mathfrak{A}$  имеют оценки (они заключительные). Если все позиции  $A$  ранга  $> n$  имеют оценки, то по теореме о переносе оценки все позиции ранга  $n$  также имеют оценки.

Итак, оценки позиций  $A$  дерева игры  $\mathfrak{A}$  удовлетворяют условиям:

$$\text{оц}(A) = \begin{cases} \max_{B \in \mathfrak{B}(A)} \text{оц}(B), & \text{если в позиции } A \text{ ход белых,} \\ \min_{B \in \mathfrak{B}(A)} \text{оц}(B), & \text{если в позиции } A \text{ ход черных,} \end{cases}$$

где  $\mathfrak{B}(A)$  — множество позиций  $B$ , непосредственно следующих за  $A$ , т. е. тех, в которые ведут ходы  $(A, B)$  из позиции  $A$ . Мы будем называть эти условия формулой Цермело, так как последний в работе [35] предложил ее в качестве определения оценок незаключительных позиций.

Дж. фон Нейману принадлежит другое определение оценки [26]. Оно основано на понятии стратегии, т. е. заранее произведенного выбора хода в каждой позиции дерева игры с ходом своего цвета. Если белые выбрали некоторую стратегию  $s$  из своего множества стратегий  $S_\delta$ , а черные — стратегию  $s' \in S_\alpha$ , то партия, которая будет сыграна, определяется однозначно. Эта партия обычно приводит в заключительную позицию  $F$ , имеющую оценку  $\text{оц}(F)$ . Тогда ее *результатом*  $r(s, s')$  называется  $\text{оц}(F)$ .

Дж. фон Нейман предлагает выбирать такую стратегию, которая при наиболее злом выборе стратегии противника дает лучший результат. Его он и называет оценкой начальной позиции. Таким образом определяются две оценки начальной позиции  $A_0$  дерева игры  $\mathfrak{A}$ :

$$\text{оц}_\delta(A_0) = \max_{s \in S_\delta} \left( \min_{s' \in S_\alpha} r(s, s') \right),$$

$$\text{оц}_\alpha(A_0) = \min_{s' \in S_\alpha} \left( \max_{s \in S_\delta} r(s, s') \right).$$

Оценки произвольной позиции  $B$  определяются из  $B$ -поддерева дерева игры  $\mathfrak{A}$  аналогичным образом.

Если дерево игры конечно и каждая заключительная позиция имеет оценку, то для любой позиции  $B$

$$\text{оц}_\delta(B) = \text{оц}_\epsilon(B) = \text{оц}(B)$$

( $\text{оц } B$  — определенная нами оценка позиции  $B$ ). Таким образом, если один из участников игры выбрал стратегию  $s$ , оптимальную по Дж. фон Нейману, и сообщил свой выбор противнику, то последний, заранее зная, каковы будут ответы на любые его ходы, все равно не смог бы улучшить для себя результат партии.

Когда не все заключительные позиции дерева игры  $\mathfrak{A}$  с начальной позицией  $A_0$  имеют оценки, все-таки могут

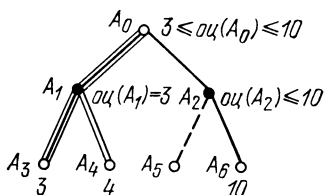


Рис. 4.

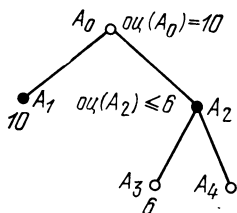


Рис. 5.

существовать  $\delta$ - и  $\epsilon$ -усеченные деревья с корнем  $A_0$  и заключительными позициями, имеющими оценки (пример на рис. 4). Этим деревьям соответствуют иероглифы

$$\text{оц}(A_0) \geq m,$$

$$\text{оц}(A_0) \leq M,$$

причем вследствие теоремы о непротиворечивости оценок  $m \leq M$ . Легко привести пример дерева игры, для которого оценка начальной позиции в нашем смысле существует, а по Дж. фон Нейману ее нет (см. рис. 5). Так как существуют такие стратегии  $s' \in S_\delta$  и  $s'' \in S_\epsilon$ , при выборе которых будет сыграна партия  $(A_0, A_2, A_4)$ , не имеющая результата, то  $\min_{s \in S_\epsilon} r(s', s'')$  и  $\max_{s \in S_\delta} r(s', s'')$ ,

а, значит,  $\text{оц}_\delta(A_0)$  и  $\text{оц}_\epsilon(A_0)$ , не определены. В то же время существуют  $\delta$ - и  $\epsilon$ -усеченные деревья с корнем  $A_0$ , определяющие значение  $\text{оц}(A_0)$ , равное 10.

Пусть даны дерево игры  $\mathfrak{A}$ , подмножество  $\mathfrak{F}$  его заключительных позиций и оценки позиций  $C \in \mathfrak{F}$ . Можно

доопределить каким-либо образом оценки заключительных позиций, не принадлежащих  $\mathfrak{F}$ . Получаемая игра  $\mathfrak{M}'$  называется расширением рассматриваемой игры  $\mathfrak{M}$ . Для любого расширения оценка начальной позиции (как и вообще всех позиций дерева игры  $\mathfrak{M}'$ ) существует. Поэтому имеет смысл говорить о верхней и нижней границах  $\text{оц}(A_0)$  по всем расширениям рассматриваемой игры  $\mathfrak{M}$ . Когда ищется оценка позиции  $A_0$  некоторой игры  $\tilde{\mathfrak{M}}$ , то можно считать, что имеется обратная ситуация.

Чтобы не рассматривать все дерево игры  $\tilde{\mathfrak{M}}$ , мы попытаемся найти такую игру  $\mathfrak{M}$ , для которой наша игра является расширением, и

$$\sup_{\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}} \text{оц}_{\mathfrak{M}'}(A_0) = \inf_{\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}} \text{оц}_{\mathfrak{M}'}(A_0) = \text{оц}_{\tilde{\mathfrak{M}}}(A_0).$$

Теорема о расширениях игры.

$$\inf_{\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}} \text{оц}(A_0) > M (\geq M)$$

тогда и только тогда, когда для рассматриваемой игры  $\mathfrak{M}$  справедливо символическое неравенство  $\text{оц}(A_0) > M (\geq M)$ , т. е. существует  $\beta$ -усеченное поддереву  $\mathfrak{M}_\beta \subset \mathfrak{M}$ , все заключительные оценки которого имеют оценки  $> M (\geq M)$ .

Доказательство.  $\beta$ -усеченное поддереву  $\mathfrak{M}_\beta$  игры  $\mathfrak{M}$  является  $\beta$ -усеченным поддеревом любого его расширения  $\mathfrak{M}'$ . Следовательно, если оценки всех заключительных позиций  $\mathfrak{M}_\beta > M (\geq M)$ , то для произвольного расширения  $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$

$$\text{оц}_{\mathfrak{M}'}(A_0) > M (\geq M)$$

и, значит,

$$\inf_{\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}} \text{оц}(A_0) > M (\geq M).$$

С другой стороны,

$$\inf_{\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}} \text{оц}_{\mathfrak{M}'}(A_0) = \text{оц}_{\mathfrak{M}^-}(A_0),$$

где не определенные в  $\mathfrak{M}$  оценки заключительных позиций в игре  $\mathfrak{M}^-$  равны  $-\infty$ , так как  $\text{оц}(A_0)$  монотонно зависит от оценок заключительных позиций игры  $\mathfrak{M}'$ .

Если  $\inf_{\mathfrak{X}' \supset \mathfrak{X}} \text{оц}(A_0) = \text{оц}_{\mathfrak{X}}(A_0) > M (\geq M)$ , то существует

$\beta$ -усеченное поддерево  $\mathfrak{X}_{\beta}^{-}$  дерева игры  $\mathfrak{X}^{-}$ , у которого оценки заключительных позиций  $> M (\geq M)$ . В этом случае все позиции принадлежат множеству  $\mathfrak{F}$  (оценки остальных заключительных позиций равны  $-\infty$ ), т. е.  $\mathfrak{X}_{\beta}^{-}$  —  $\beta$ -усеченное поддерево игры  $\mathfrak{X}$ .

Аналогично формулируется и доказывается теорема о верхней грани оценок начальной позиции  $A_0$  по всем расширениям игры  $\mathfrak{X}$ . Из этих теорем следует, что иероглифы  $\text{оц}(A) > M (\geq M, < M, \leq M)$  можно рассматривать как неравенства, выполняющиеся для оценки позиции  $A$  в любом расширении  $\mathfrak{X}'$  игры  $\mathfrak{X}$  (в игре  $\mathfrak{X}'$  все заключительные позиции имеют оценки, и, значит, оценка любой позиции  $A$  существует). Если же существует  $\text{оц}_{\mathfrak{X}} A$ , то в любом расширении  $\mathfrak{X}'$ , позиция  $A$  имеет ту же оценку.

Разумеется, существуют и такие деревья игры, у которых нет  $\beta$ - и  $\gamma$ -усеченных деревьев, ограничивающих значения оценки начальной позиции.

Пусть задано дерево игры  $\mathfrak{X}$  с начальной позицией  $A_0$ , имеющей оценку  $\text{оц}(A_0)$ . Тогда цель белых — найти *лучший ход* из позиции  $A_0$ , т. е. ход  $(A, B)$ , приводящий к позиции ранга 1 с максимальной из возможных оценок. По доказанному в этом случае  $\text{оц}(A) = \text{оц}(B)$ . Аналогично определяется лучший ход из позиции  $A$ , не являющейся корнем дерева, а всего лишь корнем своего поддерева с ходом белых.

Пусть теперь  $A$  — позиция с ходом черных. С точки зрения черных лучший ход  $(A, B)$ , естественно, ведет в позицию с минимальной из возможных оценок. На основании теоремы о переносе оценок и в этом случае  $\text{оц} A = \text{оц} B$ .

Естественно, что из каждой позиции могут существовать не один, а несколько лучших ходов.

Ветку  $W(A, B)$  назовем *критической*, если каждая ее дуга является одним из лучших ходов. Легко видеть, что оценки всех позиций на критической ветке совпадают. Это свойство является характеристическим: если оценки всех позиций на ветке  $W(A, B)$  совпадают, то ветка — критическая.

Пусть в позиции  $A$  ход белых. Ход  $(A, B)$  является лучшим тогда и только тогда, когда существуют раз-

деляющее значение  $M$ ,  $b$ -усеченное дерево  $\mathfrak{A}_b(B)$  с корнем  $B$ , у которого оценки всех заключительных позиций не меньше, чем  $M$ , и  $c$ -усеченные деревья  $\mathfrak{A}_c(B')$  с оценками заключительных позиций, не превосходящими  $M$ , для остальных ходов  $(A, B')$  из позиции  $B$ . Действительно, в этом случае  $\text{оц}(B) \geq M$ ,  $\text{оц}(B') \leq M$ , если  $(A, B') \in \mathfrak{A}$  и  $B' \neq B$ . Следовательно,

$$\text{оц}(A) = \max_{(A, B') \in \mathfrak{A}} \text{оц } B' = \text{оц } B.$$

Обратно, если  $(A, B)$  — лучший ход, то

$$\text{оц}(A) = \text{оц}(B), \quad \text{оц}(B') \leq \text{оц}(A), \text{ если } (A, B') \in \mathfrak{A},$$

и в качестве разделяющего значения  $M$  можно взять  $\text{оц}(A)$ . Аналогично формулируется условие для лучшего хода из позиции  $A$  с ходом черных.

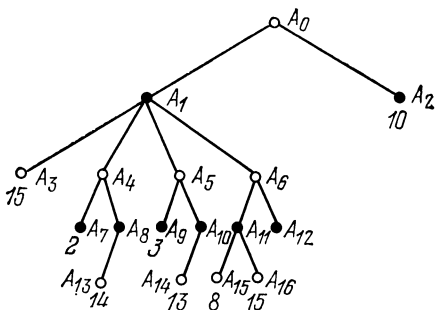


Рис. 6.

Когда дерево игры не слишком велико и оба противника в состоянии его исследовать, например, построить  $b$ - и  $c$ -усеченные деревья, то приведенное выше определение соответствует интуитивному представлению о лучшем ходе.

Иначе обстоит дело, когда хотя бы один из противников не видит всех возможностей. Рассмотрим пример игры, заданной деревом, изображенным на рис. 6, причем белые могут рассчитать все варианты на четыре хода в глубину, а черные — только на два.

В распоряжении белых есть «унылый» ход  $(A_0, A_2)$ , приводящий в позицию  $A_2$  с оценкой 10. Другой ход  $(A_0, A_1)$  предоставляет черным выбор: ответить «осто-

рожно» ( $A_1, A_3$ ) и прийти в позицию с оценкой 15 или выбрать один из трех ходов ( $A_1, A_4$ ), ( $A_1, A_5$ ) или ( $A_1, A_6$ ), всех последствий которых они не видят. При лучшем ответе ( $A_1, A_6$ ) белые вынуждены удовлетвориться оценкой 8, так что «унылый» ход ( $A_0, A_2$ ) является лучшим. Однако можно рассчитывать, что черные так не пойдут. Ход ( $A_1, A_6$ ) по виду не лучше двух других. Последние даже соблазнительнее, так как черные видят благоприятные для них ответы ( $A_4, A_7$ ) и ( $A_5, A_9$ ). Во всяком случае, если выбор хода в аналогичных ситуациях нужно производить неоднократно, «активный» ход типа ( $A_0, A_1$ ), как правило, будет приводить к лучшим результатам.

Игрок, который не видит все дерево, как бы находится в условиях игры с неполной информацией. Известную ему информацию об игре можно изобразить в виде дерева моделирующей игры, в котором оценки некоторых заключительных позиций неизвестны. Напрашивается решение считать эти оценки случайными, определить разумным образом их вероятностные параметры (математическое ожидание, дисперсию, корреляцию оценок разных позиций) и при выборе хода добиваться, например, максимального математического ожидания результата или максимальной вероятности найти лучший ход (что далеко не одно и то же).

Игрок, который видит больше противника, имея представление о его вероятностной модели, может построить свою модель также вероятностного характера, исходя из которой он будет выбирать «рискованные» ходы так, что вероятность его выигрыша будет больше.

Мы еще вернемся к вопросу о построении различных игр, моделирующих исходную. Но прежде необходимо рассмотреть различные алгоритмы нахождения лучшего хода в смысле приведенного выше формального определения.

## § 2. Обход позиций игры для определения оценки начальной позиции

Оценки позиций дерева игры  $\mathfrak{A}$ , всех или части из них, можно определить, рассматривая их в некоторой последовательности  $L\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ , может быть, с повторениями. Выбор очередного элемента этой после-

довательности является важной частью работы любого алгоритма вычисления оценок. Почти для всех известных алгоритмов она является обходом вершин дерева  $\mathfrak{A}$ , т. е. удовлетворяет условию, если дуга  $(B, C)$  принадлежит дереву и оба ее конца  $B$  и  $C$  встречаются в  $L$ , то последним из них встречается позиция  $B$ , т. е.

$$\max_{A_i=B} i > \max_{A_j=C} j.$$

Если, кроме того, в  $L$  встречаются все вершины дерева  $\mathfrak{A}$ , то такая последовательность называется *полным обходом*. При помощи полного обхода можно определить оценки всех позиций игры, применяя формулу Цермело каждый раз, когда незаключительная позиция встретится в нем последний раз.

Способы обхода позиций дерева игры  $\mathfrak{A}$ , применяемые в алгоритмах, довольно разнообразны. В этой книге многие из них будут рассматриваться. Но прежде всего нужно остановиться на наиболее употребительном в программах обходе *вперед-назад* \*). Полный обход вершин дерева  $\mathfrak{A}$  способом вперед-назад — это последовательность  $L\{A_0, A_1, \dots, A_0\}$ , при порождении очередных элементов которой выполняются правила:

1. Первым элементом является корень  $A_0$  дерева  $\mathfrak{A}$ .
2. Если  $i$ -м элементом является вершина  $B$ , и существуют дуги  $(B, C)$ , концы которых в  $L$  не встречались, то  $(i+1)$ -м элементом является конец одной из таких дуг.

3. В противном случае  $(i+1)$ -м элементом является начало  $A$  единственной дуги  $(A, B)$  дерева  $\mathfrak{A}$  с концом в вершине  $B$  (если  $B = A_0$ , то такой дуги не существует, и  $i$ -й элемент последовательности  $L(A_0, A_1, \dots, A_0)$  является последним). Говоря короче, если мы можем, то идем вперед по направлению дуг ориентированного дерева  $\mathfrak{A}$ , а если не можем идти вперед, то возвращаемся назад.

Дерево можно изобразить так, чтобы шаг вперед каждый раз производился в самую левую вершину (см. рис. 7). Вершины любого фиксированного ранга рассматриваются в порядке слева направо (в этом изображении).

---

\*) Back-tracking (англ.).

Обход вершин дерева по способу вперед-назад довольно экономен. Конечные вершины при нем рассматриваются по одному разу. Также по одному разу производится переход от начала  $B$  дуги  $(B, C) \in \mathfrak{A}$

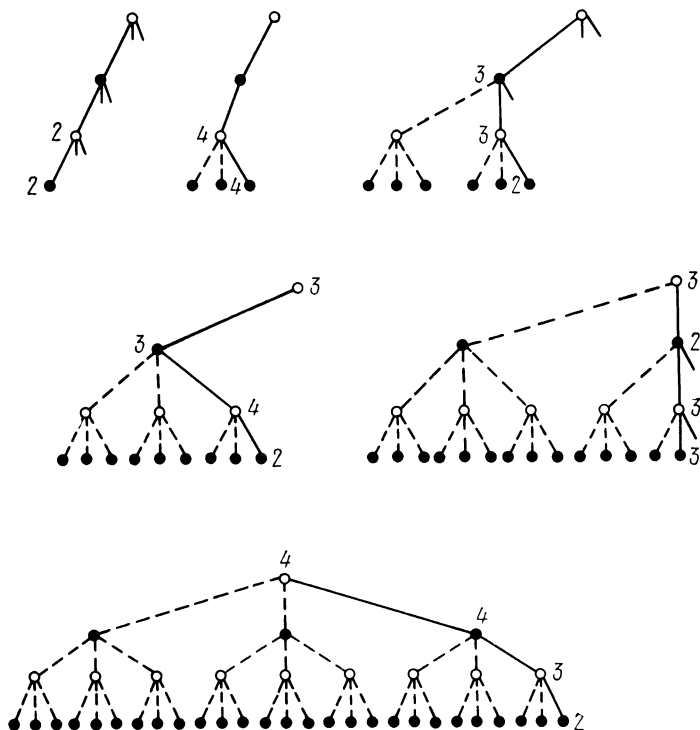


Рис. 7.

к ее концу  $C$ , обычно называемый *шагом вперед*, и от конца  $C$  к началу  $B$  — *шаг назад*. Так как любой паре  $A_i, A_{i+1}$  соседних элементов обхода соответствует шаг вперед или назад, число их на 1 больше удвоенного числа дуг, т. е. на 1 меньше удвоенного числа вершин (количество вершин дерева на 1 больше количества его дуг). Таким образом, в среднем каждая вершина дерева обходится два раза.

В каждый момент полного обхода по способу вперед-назад подмножество  $\mathfrak{V}_p$  — вершин, которые уже не встретятся, и подмножество  $\mathfrak{V}_F$  — вершин, которые еще будут встречаться, определяются информацией, связанной с вершинами ветки  $W(A_0, \dots, A_i)$  соединяющей корень  $A_0$  с очередным элементом последовательности  $A_i$ . Для каждой вершины  $A_h \in W$  достаточно знать, какие концы дуг  $(A_h, B)$  уже встретились при обходе. Действительно, если вершина  $B$  не принадлежит  $W$  и при обходе уже встречалась, то встречались и все вершины  $B$ -поддерева, причем в дальнейшем они не встретятся. Если  $B$  при обходе не встречалась, то не встречались и остальные вершины  $B$ -поддерева, и только вершины ветки  $W$  уже встречались при обходе и встретятся в дальнейшем, причем имеется информация, достаточная для продолжения обхода после того, как такая вершина встретится следующий раз. Таким образом, обход дерева способом вперед-назад нетрудно производить и тогда, когда это дерево не задано явно, а имеется лишь алгоритм порождения выходящих из заданной вершины  $A$  дуг  $(A, B)$  и их концов  $B$ .

Чтобы параллельно с обходом определять оценки всех позиций дерева игры, достаточно для всех позиций  $A_h \in W$  хранить *частичные оценки*:

$$\text{чоц}(A_h) := \begin{cases} \text{оц}(A_h), & \text{если } A_h \text{ — заключительная позиция,} \\ \max_{B \in \mathfrak{V}(A_h)} \text{оц}(B), & \text{если } A_h \text{ — незаключительная позиция с ходом белых,} \\ \min_{B \in \mathfrak{V}(A_h)} \text{оц}(B), & \text{если } A_h \text{ — незаключительная позиция с ходом черных,} \end{cases}$$

где  $\mathfrak{V}(A) = \mathfrak{W}(A) \cap \mathfrak{V}_p$  — множество уже исследованных непосредственно следующих за  $A_h$  позиций. Для незаключительной позиции с пустым множеством  $\mathfrak{V}(A)$  можно положить  $\text{чоц}(A) = \pm \infty$  (— при ходе белых, и  $+$  при ходе черных). Таким образом, если  $\mathfrak{V}(A) = \mathfrak{W}(A)$ , то  $\text{чоц}(A) = \text{оц}(A)$ .

В начале обхода определяется  $\text{чоц}(A_0) = \pm \infty$ ; при шаге вперед в конец ветки  $W$  добавляется новая

вершина  $B$  и определяется чоц ( $B$ ):

$$\text{чоц}(B) := \begin{cases} \text{оц}(B) & \text{для заключительной позиции,} \\ -\infty & \text{для незаключительной позиции} \\ & \text{с ходом белых,} \\ +\infty & \text{для незаключительной позиции} \\ & \text{с ходом черных.} \end{cases}$$

Шаг назад из вершины  $B$  происходит, когда сделать шаг вперед невозможно. Значит, в этот момент все непосредственно следующие за  $B$  позиции  $C$  исследованы, и  $\text{чоц}(B) = \text{оц}(B)$ . При этом из ветки  $W$  исключается последняя позиция  $B$ , а частичная оценка предпоследней позиции  $A$  пересчитывается:

$$\text{чоц}(A) := \begin{cases} \max(\text{чоц}(A), \text{оц}(B)), & \text{если в } A \text{ ход белых,} \\ \min(\text{чоц}(A), \text{оц}(B)), & \text{если в } A \text{ ход черных.} \end{cases}$$

Вычисляемые таким образом значения частичных оценок позиций, лежащих на ветке  $W$ , в любой момент обхода удовлетворяют определению частичной оценки, и после того, как они встретятся при обходе в последний раз, равны их оценкам.

Выясним теперь, как найти  $\delta$ -усеченное поддерево  $\mathfrak{H}_\delta$  и  $\epsilon$ -усеченное  $\mathfrak{H}_\epsilon$ , которые определяют найденную оценку начальной позиции  $A_0$ . Для этого изобразим дерево игры  $\mathfrak{H}$  так, чтобы в каждой позиции шаги вперед выбирались в порядке слева направо и будем *красить* ходы в белый и черный цвет по следующим правилам.

1. Если в начальной позиции  $A_0$  ход белых (черных), то все ходы из нее красятся в черный (белый) цвет, а самый левый лучший ход — также и в белый (черный).

2. Если в позицию  $A$  с ходом белых (черных) ведет ход некоторого цвета, то самый левый лучший ход из нее красится в тот же цвет.

3. Если в позицию  $A$  с ходом белых (черных) ведет ход противоположного цвета, то все ходы из нее тоже красятся в противоположный цвет.

Таким образом, в белый цвет окрашивается некоторое  $\delta$ -усеченное поддерево  $\mathfrak{H}_\delta$  дерева игры  $\mathfrak{H}$ , а в черный —  $\epsilon$ -усеченное поддерево  $\mathfrak{H}_\epsilon$ ; оба они минимальны по включению и пересекаются по самой левой ветке  $W$ ,

выходящей из начальной позиции  $A_0$ , ходы которой (и только они) окрашены в оба цвета (см. рис. 8).

Лемма о ветке дерева  $\mathfrak{A}_\delta$ . Пусть  $W (A = A_1, \dots, A_k)$  — произвольная ветка  $\delta$ -усеченного дерева  $\mathfrak{A}_\delta$ . Тогда

$$\text{оц}(A_1) \leq \text{оц}(A_2) \leq \dots \leq \text{оц}(A_k).$$

Действительно, если  $A_i \in W$  — позиция с ходом белых

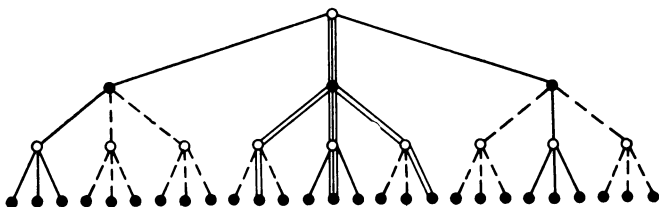


Рис. 8.

( $i < k$ ), то  $(A_i, A_{i+1})$  — лучший ход в ней и  $\text{оц}(A_i) = \text{оц}(A_{i+1})$ ; если же  $A_i$  — позиция с ходом черных, то

$$\text{оц}(A_i) = \min_{B \in \mathfrak{W}(A_i)} \text{оц}(B) \leq \text{оц}(A_{i+1}).$$

Аналогично формулируется и доказывается лемма о ветке дерева  $\mathfrak{A}_\epsilon$ , окрашенном в черный цвет. Из этих лемм следует, что оценки всех позиций пересечения  $\mathfrak{A}_\delta \cap \mathfrak{A}_\epsilon$  равны  $\text{оц}(A_0)$ . Значит, ход  $(A_0, A_1)$ , принадлежащий самой левой критической ветке  $W = \mathfrak{A}_\delta \cap \mathfrak{A}_\epsilon$  — лучший, оценки всех заключительных позиций «белого» дерева  $\mathfrak{A}_\delta$  не меньше  $\text{оц}(A_0)$ , а оценки заключительных позиций «черного» дерева  $\mathfrak{A}_\epsilon$  не больше  $\text{оц}(A_0)$ . Таким образом, для определения оценки позиции  $A_0$  и лучшего хода из нее достаточно было бы рассмотреть только эти поддеревья, а остальная работа, произведенная при обходе, является лишней.

Для определения лучшего хода в начальной позиции  $A_0$  знание оценок всех позиций дерева игры  $\mathfrak{A}$  не является необходимым. Пусть например,  $\mathfrak{A}$  — дерево игры, изображенное на рис. 9, причем белые и черные ходят по очереди, и в начальной позиции  $A_0$  ход белых. Предположим, что уже выполнена часть обхода  $L' \{A_0, A_1, A_0, A_2, A_3, A_2\}$  (оценки заключительных

позиций и найденные частичные оценки незаключительных позиций проставлены на рис. 9 рядом с соответствующими вершинами). Так как в позиции  $A_0$  ход белых,  $\text{оц}(A_0) \geq \text{чоц}(A_0) = 10$ ; в позиции  $A_2$  ход черных, и  $\text{оц}(A_2) \leq \text{чоц}(A_2) = 5$ . Кроме того,

$\text{оц}(A_0) = \max(\text{оц}(A_1), \text{оц}(A_2)) \leq (\text{оц}(A_1), \text{чоц}(A_2)) = 10$ .

Следовательно,  $\text{оц}(A_0) = 10$ ,  $(A_0, A_1)$  — лучший ход в начальной позиции игры, и не нужно продолжать обход позиций. Более сложный пример приведен на рис. 10, причем, как и в предыдущем примере, ходы белых и

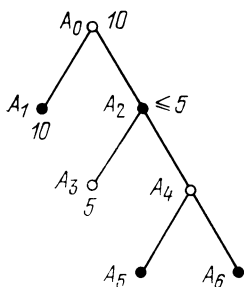


Рис. 9.

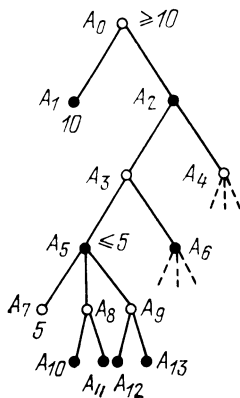


Рис. 10.

черных делаются по очереди. Пусть произведена часть обхода  $L' \{A_0, A_1, A_0, A_2, A_3, A_5, A_7, A_9\}$  и получены частичные оценки позиций  $A_0$  и  $A_5$ . Если ход  $(A_3, A_5)$  — лучший, то

$$\text{оц}(A_2) \leq \text{оц}(A_3) = \text{оц}(A_5) \leq \text{чоц}(A_5) = 5.$$

Поэтому, минуя позиции  $A_8, A_9, \dots, A_{13}$ , можно сразу перейти к оценке позиции  $A_6$ . Если при этом окажется, что  $\text{оц}(A_6) < 10$ , то и

$$\text{оц}(A_2) \leq \text{оц}(A_3) = \max(\text{оц}(A_5), \text{оц}(A_6)) < 10,$$

т. е.  $(A_0, A_1)$  — лучший ход в начальной позиции  $A_0$ , и  $\text{оц}(A_0) = 10$ . В противном случае  $\text{оц}(A_2) \geq \text{оц}(A_3) = \text{оц}(A_6) > 10$  и  $(A_0, A_2)$  — лучший ход.

Чтобы использовать все возможности сокращения перебора, аналогичные приведенным выше, естественно изменить сформулированное выше 2-е правило обхода,

связав его с конструируемыми частичными оценками позиций ветки  $W$ :

2'. Если  $k$ -м элементом последовательности  $L$  является позиция  $B$  с ходом белых (черных), а для всех позиций  $A$  ветки  $W(A_0, \dots, B)$  с ходом черных (белых)  $\text{чоц}(A) < \text{чоц}(B)$  ( $\text{чоц}(A) > \text{чоц}(B)$ ), и существуют дуги  $(B, C)$ , концы которых при обходе еще не встречались, то следующим элементом обхода является одна из еще не встречавшихся непосредственно следующих за  $B$  позиций.

Ниже будет показано, что таким образом действительно можно найти оценку начальной позиции  $A_0$  и лучший ход из нее. Однако вычисляемые при этом значения, которые мы раньше называли частичными оценками позиций, уже не будут ими являться. Поэтому мы будем называть их *гранями*. Теория граней и оценок впервые была рассмотрена А. Л. Брудно в статье [10]. Правило отсечения вариантов при переборе, которое следует из этой теории и, по существу, эквивалентно нашему, часто называют  $\alpha$ ,  $\beta$ -эвристикой. Удобно несколько изменить его формулировку, чтобы более явным образом указать, когда производятся отсечения, т. е. отказы от просмотра целых поддеревьев дерева игры  $\mathfrak{H}$ . Эквивалентность новых правил сформулированным выше будет очевидна.

*Обход* — это последовательность шагов, с каждым из которых связаны очередная позиция  $B$  и очередной ход  $(B, C)$  из нее или  $(A, B)$  в нее (ниже мы увидим, что имеется одно исключение). Очередной позицией следующего шага является другая позиция, связанная с очередным ходом, очередной позицией первого шага — начальная позиция  $A_0$ . Таким образом, в начале каждого шага известна связанная с ним очередная позиция. Однако не известно, является он шагом вперед или назад (тем более, не известен очередной ход). Прежде всегда определяется характер шага в соответствии со следующими правилами. При их формулировке приняты обозначения:  $\text{гр}(A)$  — значение грани позиции  $A$  в рассматриваемый момент;  $\text{Гр}(A)$  — последнее значение  $\text{гр}(A)$ , т. е. значение в момент шага назад из позиции  $A$ ;  $W$  — ветка, ведущая из начальной позиции в очередную;  $B$  — множество позиций белых в ветке  $W$ ;  $C$  — множество позиций черных в ветке  $W$ .

*Правило отсечения:* если в очередной позиции  $A$  ход белых (черных) и

$$\text{гр}(B) \geq \min_{A \in \mathcal{C}} \text{гр}(A) \left( \text{гр}(B) \leq \max_{A \in B} \text{гр}(A) \right),$$

то наш шаг будет шагом назад.

*Правило конца просмотра:* если позиция  $B$  — заключительная или если все непосредственно следующие за ней позиции уже рассматривались, то наш шаг будет шагом назад.

*Правило углубления:* если предыдущие правила неприменимы, то наш шаг будет шагом вперед.

Теперь определяется очередной ход. При шаге назад им является ход  $(A, B)$  из предпоследней позиции  $A$  ветки  $W$  в очередную позицию  $B$ . Если же очередная позиция — начальная, то такого хода нет. Это является признаком конца обхода. При шаге вперед очередным является ход  $(B, C)$  из очередной позиции  $B$  в одну из еще не рассматривавшихся позиций. Мы всегда будем считать, что это самый левый из еще не рассматривавшихся ходов. Таким образом, после шага назад ветка  $W$  укорачивается на одну позицию, а после шага вперед на одну позицию удлиняется.

Наконец, пересчитывается или определяется значение грани очередной позиции следующего шага. На шаге назад с очередным ходом  $(A, B)$

$$\begin{aligned} \text{гр}(A) &:= \\ &= \begin{cases} \max(\text{гр}(A), \text{Гр}(B)), & \text{если в позиции } A \text{ ход белых,} \\ \min(\text{гр}(A), \text{Гр}(B)), & \text{если в позиции } A \text{ ход черных;} \end{cases} \end{aligned}$$

на шаге вперед с очередным ходом  $(B, C)$

$$\text{гр}(C) = \begin{cases} \text{оц}(C), & \text{если } C \text{ — заключительная позиция,} \\ -\infty, & \text{если } C \text{ — незаключительная позиция} \\ & \text{с ходом белых,} \\ +\infty, & \text{если } C \text{ — незаключительная позиция} \\ & \text{с ходом черных.} \end{cases}$$

Перед началом обхода оценка начальной позиции  $A_0$  определяется так, как будто первому шагу предшествует нулевой, являющийся шагом вперед.

Таким образом, в любой момент обхода значения граней удовлетворяют условию, похожему на формулу Цермело:

$\text{Гр}(A) =$

$$= \begin{cases} \text{оц}(A), & \text{если } A \text{ — заключительная позиция,} \\ \max_{B \in \mathfrak{B}(A)} \text{гр}(B), & \text{если } A \text{ — незаключительная позиция} \\ & \text{с ходом белых,} \\ \min_{B \in \mathfrak{B}(A)} \text{гр}(B), & \text{если } A \text{ — незаключительная позиция} \\ & \text{с ходом черных.} \end{cases}$$

При этом максимум или минимум берется не по всем непосредственно следующим за  $A$  позициям, а по всем тем из них, которые уже просмотрены.

Легко видеть, что множество всех просмотренных при обходе позиций является поддеревом  $\tilde{\mathfrak{A}}$  дерева игры  $\mathfrak{A}$  с корнем в начальной вершине  $A_0$  и концевыми вершинами, которым соответствуют заключительные позиции игры  $\mathfrak{A}$  с заданными оценками. Его можно рассматривать как дерево модельной игры с той же очередностью хода в каждой незаключительной позиции и теми же оценками в заключительных позициях, что и в исходной игре.

Построим теперь указанным выше способом поддерева  $\tilde{\mathfrak{A}}_b$  и  $\tilde{\mathfrak{A}}_c$  белого и черного цвета и докажем, что они являются соответственно  $b$ -и  $c$ -усеченными поддеревами дерева исходной игры  $\mathfrak{A}$ . Тогда  $\text{оц}(A_0) = \text{гр}(A_0)$ , и лучшим является ход  $(A_0, A_1)$ , где  $A_1 \in \tilde{\mathfrak{A}}_b \cap \tilde{\mathfrak{A}}_c$ . Справедливость этих утверждений следует из доказываемых ниже лемм об изменениях значений граней в процессе обхода. Ниже приводятся формулировки и доказательства лемм о гранях позиций с ходом белых или принадлежащих дереву  $\tilde{\mathfrak{A}}_b$ . Соответствующие леммы с переменной цветов формулируются и доказываются аналогично. Для любой позиции  $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$  текущее значение ее грани мы будем обозначать  $\text{гр}(A)$ , окончательное —  $\text{Гр}(A)$ .

**Лемма о монотонном изменении.** Пусть  $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$  — позиция с ходом белых. Тогда значение  $\text{гр}(A)$  не уменьшается.

**Доказательство.** По сформулированным выше правилам грани  $\text{гр } A$  позиции  $A$  либо сразу присваи-

вается значение  $\text{оц}(A)$ , причем в дальнейшем оно не меняется, либо присваивается значение  $-\infty$ , которое в дальнейшем меняется по формуле

$$\text{гр}(A) := \max(\text{гр}(A), \text{гр}(B)), \quad (A, B) \in \mathfrak{A},$$

т. е. может только увеличиться.

**Лемма о строгой монотонности.** Пусть  $B \in \mathfrak{A}_\delta$  — *незаключительная позиция с ходом белых*. Пока в нее не будет произведен шаг назад из единственной непосредственно следующей позиции, принадлежащей поддереву  $\mathfrak{A}_\delta$ , выполняется неравенство  $\text{гр}(B) < \Gamma(B)$ .

**Доказательство.** Когда мы попали в  $B$  первый раз,

$$\text{гр}(B) := -\infty < \Gamma(B).$$

Все шаги вперед из  $B$  с очередным ходом, отличным от  $(B, C)$ , где  $C \in \mathfrak{A}_\delta$ , не являются в игре  $\mathfrak{A}$  лучшими. Следовательно, окончательные значения граней позиций, в которые они ведут, меньше, чем  $\text{гр}(B) = \text{гр}(C)$  и перед шагом назад из  $C$  в  $B$

$$\text{гр}(B) = \max_{C' \in \mathfrak{B}(B)} \Gamma(C') < \Gamma(B).$$

**Лемма о полноте поддерева  $\mathfrak{A}_\delta$ .** Пусть  $C \in \mathfrak{A}_\delta$  — *незаключительная позиция с ходом черных*. Тогда ни на каком шаге с очередной позицией  $C$  правило отсечения неприменимо.

**Доказательство.** Пусть  $W(A_0, \dots, C)$  — ветка из начальной позиции  $A_0$  в очередную позицию  $C$  с ходом черных, и  $B \in \mathfrak{B}$  — произвольная позиция с ходом белых, принадлежащая ветке  $W$ . Окончательные значения  $\text{гр}(B)$  и  $\text{гр}(C)$  равны оценкам этих позиций в игре  $\mathfrak{A}$ .  $B$ -поддерево  $\delta$ -усеченного дерева  $\mathfrak{A}_\delta$  само является  $\delta$ -усеченным деревом с оценками заключительных позиций, не меньшими, чем  $\text{гр}(B)$ . Оно содержит позицию  $C$ , а, значит, и  $C$ -поддерево дерева  $\mathfrak{A}_\delta$ . Последнее также является  $\delta$ -усеченным деревом. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma(C) = \text{оц}_{\mathfrak{A}}(C) &\geq \min_{F \in \mathfrak{A}_\delta \cap \delta} \text{оц}(F) \geq \min_{F \in \mathfrak{A}_\delta(B) \cap \delta} \text{оц}(F) = \\ &= \text{оц}_{\mathfrak{A}}(B) = \Gamma(B), \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathfrak{H}}_b(B)$  и  $\tilde{\mathfrak{H}}_b(C)$  —  $B$ - и  $C$ -поддеревья дерева  $\tilde{\mathfrak{H}}_b$ , а  $\mathfrak{H}$  — множество всех заключительных позиций игры  $\mathfrak{H}$ .

Вследствие доказанного выше неравенства, а также лемм о строгой монотонности и о монотонном изменении граней (последняя нам нужна в формулировке для позиций с ходом черных), пока не сделан шаг назад в позицию  $B$ , и, значит все время, когда рассматривается позиция  $C$ , выполняются неравенства

$$\text{гр}(B) < \Gamma \text{р}(B) \leq \text{гр}(C) \leq \Gamma \text{р}(C).$$

Следовательно, когда позиция  $C$  является очередной, для всех позиций  $B \in \tilde{B}$  выполняются неравенства  $\text{гр}(B) < \leq \text{гр}(C)$ , и правило отсечения применить нельзя.

Таким образом, для каждой незаключительной позиции  $C \in \tilde{\mathfrak{H}}_b$  с ходом черных все ходы из нее также принадлежат  $\tilde{\mathfrak{H}}_b$ , т. е. доказана

Теорема о белом дереве обхода с отсечениями. *Белое дерево  $\tilde{\mathfrak{H}}_b$  является  $b$ -усеченным поддеревом дерева рассматриваемой игры  $\mathfrak{H}$ .*

Из теорем о белом и черном деревьях обхода следует теорема о грани начальной позиции и критической ветке. После конца обхода  $\Gamma \text{р}(A_0) = \text{оц}(A_0)$ , а пересечение белого и черного деревьев обхода является критической веткой.

Выясним теперь, какую информацию о позиции  $B$  мы имеем в момент шага назад из нее. Пусть  $W(A_0, \dots, B)$  — ветка, ведущая в  $B$  из начальной позиции  $A_0$ ;  $B$  и  $Ч$  — множества позиций этой ветки, не считая самой позиции  $B$ , соответственно с ходом белых и черных,

$$\lim := \max_{A \in B} \text{гр}(A),$$

$$\overline{\lim} := \min_{A \in Ч} \text{гр}(A),$$

где значения граней позиций взяты в момент шага назад из позиции  $B$ . Впрочем, они такие же все время от шага вперед в позицию  $B$  до шага назад из нее. Если  $B = \emptyset$ , то  $\lim = -\infty$ , если  $Ч = \emptyset$ ,  $\overline{\lim} = +\infty$ .

Лемма.  $\overline{\lim} > \lim$ .

Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда  $\overline{\lim} < +\infty$  и  $\lim > -\infty$ . Пусть

$$\overline{\lim} \leq \lim, \quad \lim = \text{гр}(A') \quad (A' \in B),$$

$$\overline{\lim} = \text{гр}(A'') \quad (A'' \in Ч).$$

$A' \neq A''$ , так как в позиции  $A'$  ход белых, а в  $A''$  — черных. Пусть, например, эти ходы расположены на ветке в порядке  $W (A_0, \dots, A', \dots, A'', \dots, B)$ . Тогда позиция  $A''$  принадлежит  $A'$ -поддереву дерева игры  $\mathfrak{M}$ , а  $B$  — его  $A''$ -поддереву. Значит, обход производится в следующем порядке: сначала значение  $\text{гр}(A')$  становится равным  $\overline{\text{lim}}$ , затем делается шаг вперед из  $A'$  вдоль ветки  $W$  и через некоторое время (может быть, сразу) — шаг вперед в  $A''$ ; в дальнейшем значение  $\text{гр}(A'')$  становится равным  $\overline{\text{lim}}$ , производится шаг вперед из  $A''$  в направлении ветки  $W$ , и только после этого очередной позицией может стать позиция  $B$ . Однако, когда после шага назад в  $A''$  значение  $\text{гр}(A'')$  станет равным  $\overline{\text{lim}}$ , будет выполняться условие

$$\text{гр}(A'') = \overline{\text{lim}} \leq \underline{\text{lim}} = \text{гр}(A'),$$

т. е. нужно будет применить правило отсечения и сделать шаг назад из позиции  $A''$ . Но тогда позиция  $B$  не встретится в процессе обхода, что противоречит условиям леммы.

Если  $\text{Гр}(B) \leq \underline{\text{lim}}$ , то позиция  $B$  *недопустима для белых* (когда в  $B$  ход черных, по этой причине применяется правило отсечения), если же  $\text{Гр}(B) \geq \overline{\text{lim}}$ , то она *недопустима для черных*. Ниже показывается, каков смысл этих слов.

**Теорема о гранях и оценках.** Если при шаге назад из позиции  $B$   $\text{Гр}(B) \geq \overline{\text{lim}}$ , то и  $\text{оц}(B) \geq \overline{\text{lim}}$ ; если  $\text{Гр}(B) \leq \underline{\text{lim}}$ , то и  $\text{оц}(B) \leq \underline{\text{lim}}$ ; если же  $\underline{\text{lim}} < \text{Гр}(B) < \overline{\text{lim}}$ , то  $\text{Гр}(B) = \text{оц}(B)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную игру  $\mathfrak{M}(B)$ , дерево которой состоит из позиций  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ , ходов  $(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1), (\tilde{A}_0, \tilde{A}_2), (\tilde{A}_2, \tilde{A}_3), (\tilde{A}_2, B)$ , а также  $B$ -поддерева дерева игры  $\mathfrak{M}$  (см. рис. 11). Очередь хода в позиции  $\tilde{A}_0$  принадлежит той же стороне, что и в позиции  $B$ , в позиции  $\tilde{A}_2$  — противоположной стороне (в дальнейшем мы будем считать, что в  $B$  ход белых). Позиции  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_3$  — заключительные с оценками  $\text{оц}(\tilde{A}_1) = \underline{\text{lim}}$ ,  $\text{оц}(\tilde{A}_3) = \overline{\text{lim}}$  (если в  $B$  ход черных, то наоборот  $\text{оц}(\tilde{A}_1) = \overline{\text{lim}}$ ,  $\text{оц}(\tilde{A}_3) = \underline{\text{lim}}$ ). Очередь хода

в незаключительных позициях  $B$ -поддерева и оценки его заключительных позиций те же, что и в игре  $\mathfrak{A}$ . Тогда отрезок обхода позиций дерева игры  $\mathfrak{A}$ , который начинается после шага вперед в позицию  $B$  и кончается шагом назад из нее, протекает так же, как обход позиций дерева игры  $\mathfrak{A}(B)$  после начальных шагов с очередными позициями  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_0, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_2, B$ , причем

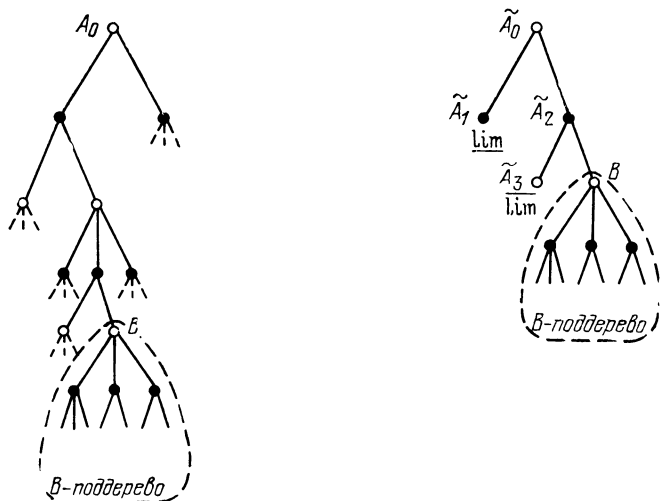


Рис. 11.

после рассматриваемого отрезка обход позиций дерева  $\mathfrak{A}(B)$  будет закончен двумя шагами назад с очередными позициями  $\tilde{A}_2$  и  $\tilde{A}_0$ .

По теореме о грани начальной позиции  $\text{Гр}(\tilde{A}_0) = \text{оц}(\tilde{A}_0)$  (напомним, что  $\text{Гр}(\tilde{A}_0)$  — это значение  $\text{гр}(\tilde{A}_0)$  в конце алгоритма обхода). Кроме того,

$$\text{оц}(\tilde{A}_0) = \max(\underline{\lim}, \text{оц}(\tilde{A}_2)),$$

$$\text{Гр}(\tilde{A}_0) = \max(\underline{\lim}, \text{Гр}(\tilde{A}_2)).$$

Значит, либо  $\text{оц}(\tilde{A}_0) = \underline{\lim}$  и тогда

$$\text{оц}(\tilde{A}_2) \leq \underline{\lim}, \quad \text{Гр}(\tilde{A}_2) \leq \underline{\lim},$$

либо

$$\text{оц}(\tilde{A}_0) = \text{оц}(\tilde{A}_2) = \text{Гр}(\tilde{A}_2) > \underline{\lim}.$$

В первом случае  $(\tilde{A}_2, B)$  — лучший ход из позиции  $\tilde{A}_2$  (другой ход ведет в позицию  $\tilde{A}_3$  с оценкой  $\overline{\lim} > \underline{\lim} \geq \geq \text{оц}(\tilde{A}_2)$ ). Следовательно,

$$\underline{\lim} \geq \text{оц}(\tilde{A}_2) = \text{оц}(B),$$

$$\underline{\lim} \geq \text{Гр}(\tilde{A}_2) = \min(\overline{\lim}, \text{Гр}(B)) = \text{Гр}(B).$$

Во втором случае либо

$$\text{оц}(\tilde{A}_2) = \min(\overline{\lim}, \text{оц}(B)) = \overline{\lim} \leq \text{оц}(B),$$

$$\overline{\lim} = \text{оц}(\tilde{A}_2) = \text{Гр}(\tilde{A}_2) = \min(\overline{\lim}, \text{Гр}(B)) \leq \text{Гр}(B),$$

либо

$$\begin{aligned} \overline{\lim} > \text{оц}(B) = \text{оц}(\tilde{A}_2) = \text{Гр}(\tilde{A}_2) = \\ = \min(\overline{\lim}, \text{Гр}(B)) = \text{Гр}(B). \end{aligned}$$

Вследствие формулы Цермело оценки позиции  $B$  в играх  $\mathfrak{M}$  и  $\tilde{\mathfrak{M}}(B)$  одинаковы. Значит, утверждения теоремы доказаны. Когда в позиции  $B$  ход черных, доказательство аналогично.

Таким образом, позиция  $B$  недопустима для белых, если ее оценка не больше  $\underline{\lim}$ , и для черных, если ее оценка не меньше  $\overline{\lim}$ . Иными словами, во время обхода  $B$ -поддерева дерева игры  $\mathfrak{M}$  белые надеются добиться оценки начальной позиции  $A_0$ , большей, чем  $\underline{\lim}$ , а черные — меньшей, чем  $\overline{\lim}$ .

**Теорема о кандидатах в позиции критической ветки.** Если позиция недопустима для белых или черных, то она не может принадлежать критической ветке, определяемой процессом обхода.

**Доказательство.** Пусть, например,

$$\text{Гр}(B) \geq \overline{\lim} = \text{Гр}(A) < +\infty \quad (A \in \mathcal{U}),$$

т. е. позиция  $B$  недопустима для черных. Если бы она принадлежала критической ветке  $W(A_0, \dots, A, \dots, B, \dots)$ , то последние значения  $\text{гр}(A)$  и  $\text{гр}(B)$  оказались бы равными. Но после шага назад из  $B$  значение  $\text{гр}(B)$  не меняется, а  $\text{гр}(A)$  может только уменьшиться ( $A$  — позиция с ходом черных). Следовательно,  $\text{гр}(A)$  уже равна  $\text{Гр}(B)$  и в дальнейшем не меняется. Вместе с тем

$$\text{гр}(A) = \min_{B' \in \mathfrak{B}(A)} \text{Гр}(B') = \text{Гр}(B'') \quad (B'' \in \mathfrak{B}(A)).$$

Поэтому ветка  $W(A_0, \dots, A, B'', \dots)$ , состоящая из рассматриваемых при обходе позиций, также является критической и расположена левее ветки  $W$ , т. е. последняя при обходе не выделяется, что и требовалось доказать.

Аналогично рассматривается случай, когда  $\text{гр } B \leq \lim$ .

Пусть нужно только узнать, выполняется ли для некоторой позиции  $A$  игры  $\mathfrak{A}$  условие  $\text{оц}(A) > m$ , а искать точное значение оценки и лучший ход из  $A$  не обязательно. Тогда можно производить обход  $A$ -поддерева этой игры, но начальные значения граней для незаключительных позиций  $B$  с ходом белых полагать равными не  $-\infty$ , а  $m$ . Такой обход будет производиться так, как будто в каждой рассматриваемой позиции  $B$  с ходом белых есть еще один ход  $(B, B')$  в заключительную позицию  $B'$  с  $\text{оц}(B') = m$ , который исследуется в первую очередь. Таким образом, при  $\text{гр}(A) > m$  эта грань совпадает с  $\text{оц}(A)$ , и мы сможем определить лучший ход. Если же  $\text{Гр}(A) = m$ , то  $\text{оц}(A) \leq m$ , но лучший ход неизвестен. Аналогично, когда требуется выяснить, выполняются ли условия  $m < \text{оц}(A) < M$ , при шаге вперед в позицию  $B$  можно положить:

$$\text{Гр}(B) := \begin{cases} \text{оц}(B) & \text{для заключительных позиций,} \\ m & \text{для незаключительных позиций} \\ & \text{с ходом белых,} \\ M & \text{для незаключительных позиций} \\ & \text{с ходом черных.} \end{cases}$$

### § 3. О количестве позиций, которые рассматриваются при определении оценки позиции и лучшего хода

Игру  $\mathfrak{A}$  не обязательно задавать своим деревом и оценками заключительных позиций. Например, позиция игры в шахматы определяется положением фигур на доске, очередью хода и небольшим количеством дополнительных сведений (сохранение возможностей рокировать в каждую из сторон, взятие на проходе, ничья вследствие троекратного повторения позиции или по правилу 50 ходов), относящихся к ветке  $W$  из начальной позиции шахмат в рассматриваемую. По этой инфор-

мации однозначно определяется, является ли последняя заключительной и с какой оценкой, а также какие ходы можно сделать из нее в противном случае. Вследствие такой специфики игры во многих позициях можно определить оценку или лучший ход, не доводя рассматриваемую часть подчиненного поддерева игры до заключительных позиций.

Если же дерево игры задано каким угодно способом (хотя бы косвенно), но оценка каждой заключительной позиции задается явно и притом может оказаться любой, то по теоремам о расширениях игры для определения оценки позиции  $A$  или лучшего хода из нее необходимо рассмотреть все заключительные позиции некоторых  $b$ - и  $c$ -усеченных поддеревьев  $\mathfrak{A}_b(A)$  и  $\mathfrak{A}_c(A)$  с корнем  $A$ . С другой стороны, построение таких поддеревьев с оценками заключительных позиций, удовлетворяющими условию

$$\min_{C \in \mathfrak{F}_b(A)} \text{оц}(C) = \max_{C \in \mathfrak{F}_c(A)} \text{оц}(C),$$

где  $\mathfrak{F}_b(A)$  и  $\mathfrak{F}_c(A)$  — соответственно множества заключительных позиций поддеревьев  $\mathfrak{A}_b(A)$  и  $\mathfrak{A}_c(A)$ , достаточно для определения оценки позиции  $A$  и лучшего хода из нее.

Если, как это бывает обычно,  $b$ - и  $c$ -усеченные поддерева игры  $\mathfrak{A}$  сильно ветвятся вследствие того, что из незаключительных позиций, как правило, можно сделать более чем один ход, то количество всех позиций этих поддеревьев по порядку такое же, как и число их заключительных позиций. Поэтому минимальный по порядку количества рассматриваемых позиций алгоритм определения оценки позиции или лучшего хода можно искать среди тех алгоритмов, которые вместе с каждой заключительной позицией  $C$  рассматривают все позиции ветки  $W(A, \dots, C)$ , ведущей в нее из позиции  $A$ , для которой ищутся оценка или лучший ход. Можно считать, что последняя позиция — это начальная позиция  $A_0$ . Иначе будет рассматриваться игра  $\mathfrak{A}(A)$ , деревом которой является  $A$ -поддерево дерева игры  $\mathfrak{A}$ , при этом очередь хода в позициях и оценки последних те же.

Ветки  $W(A_0, \dots, C)$  определяют поддерево  $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ , которое по сказанному выше включает  $b$ - и  $c$ -усеченные

поддеревья  $\mathfrak{A}_b$  и  $\mathfrak{A}_c$  с равными, соответственно, нижней и верхней гранями оценок заключительных позиций. Так как дерево игры  $\mathfrak{A}$  конечно, то внутри этих поддеревьев лежат минимальные по включению  $b$ - и  $c$ -усеченные поддеревья  $\mathfrak{A}'_b$  и  $\mathfrak{A}'_c$ , обладающие тем же свойством. Естественно, минимальный по порядку количества рассматриваемых позиций алгоритм можно искать среди таких алгоритмов, которые рассматривают только позиции минимальных по включению  $b$ - и  $c$ -усеченных поддеревьев, определяющих оценку начальной позиции  $A_0$ .

*Лемма о минимальности. Минимальное по включению  $b$ -усеченное поддерево  $\mathfrak{A}_b$  игры  $\mathfrak{A}$  содержит ровно по одному ходу из каждой незаключительной позиции  $B$  с ходом белых.*

Действительно, если  $(B, C) \in \mathfrak{A}_b$  и  $(B, C') \in \mathfrak{A}_b$ , то второй ход и  $C'$ -поддерево дерева  $\mathfrak{A}_b$  можно исключить, и дерево останется  $b$ -усеченным.

Справедлива также аналогичная лемма с переменной цветов.

*Лемма о критической ветке. Минимальные по включению  $b$ - и  $c$ -усеченные поддеревья дерева игры  $\mathfrak{A}$  пересекаются по ветке  $W(A_0, \dots, C)$ , соединяющей начальную позицию  $A_0$  с некоторой заключительной позицией  $C$ . Если эти поддеревья определяют оценку позиции  $A_0$ , то ветка  $W$  — критическая.*

*Доказательство.* Пусть незаключительная позиция  $B \in \mathfrak{A}_b \cap \mathfrak{A}_c$ , где  $\mathfrak{A}_b$  и  $\mathfrak{A}_c$  — минимальные по включению соответственно  $b$ - и  $c$ -усеченные поддеревья. Если в позиции  $B$  ход белых (черных), то поддерево  $\mathfrak{A}_b$  ( $\mathfrak{A}_c$ ) содержит ровно один ход  $(B, C)$  из нее, а  $\mathfrak{A}_c$  ( $\mathfrak{A}_b$ ) — все такие ходы. Таким образом,  $\mathfrak{A}_b \cap \mathfrak{A}_c$  содержит один ход  $(A_0, A_1)$  из начальной позиции  $A_0$  в некоторую позицию  $A_1$  первого ранга, один ход  $(A_1, A_2)$  в позицию  $A_2$  2-го ранга и т. д., пока не будет достигнута заключительная позиция  $C$ . Пересечение двух поддеревьев дерева игры  $\mathfrak{A}$  является деревом, т. е. связно, следовательно, кроме указанных выше позиций и ходов, составляющих ветку  $W(A_0, \dots, C)$ , в пересечении  $\mathfrak{A}_b \cap \mathfrak{A}_c$  никаких других позиций и ходов нет. Если поддеревья  $\mathfrak{A}_b$  и  $\mathfrak{A}_c$  определяют оценку начальной позиции  $A_0$ , то для любой позиции  $B \in \mathfrak{A}_b$

$$\text{оц}(B) \geq \text{оц}(A_0)$$

и для любой позиции  $B \in \mathfrak{A}_\alpha$

$$\text{оц}(B) \leq \text{оц}(A_0).$$

Значит, все позиции  $B$  ветки  $W(A_0, \dots, C)$  имеют оценки, равные  $\text{оц}(A_0)$ , т. е.  $W$  — критическая ветка, что и требовалось доказать.

Пусть  $\mathfrak{A}_\beta$  и  $\mathfrak{A}_\alpha$  —  $\beta$ - и  $\alpha$ -усеченные поддеревья, определяющие оценку начальной позиции  $A_0$  игры  $\mathfrak{A}$ . Тогда существуют способы выбора очередного хода в алгоритме обхода дерева  $\mathfrak{A}$ , при которых алгоритм обхода пройдет только по вершинам объединения поддеревьев  $\mathfrak{A}_\beta \cup \mathfrak{A}_\alpha$ . Если  $\mathfrak{A}_\beta$  и  $\mathfrak{A}_\alpha$  —  $\beta$ - и  $\alpha$ -усеченные поддеревья с минимальным количеством позиций в объединении, то рассматриваемый вариант алгоритма обхода будет минимальным среди любых алгоритмов определения оценки начальной позиции или лучшего хода из нее (без использования специфики определения оценок заключительных позиций). Однако при определении выбора очередного хода будет предполагаться, что деревья  $\mathfrak{A}_\beta$  и  $\mathfrak{A}_\alpha$  известны. Тем не менее проводимое ниже доказательство показывает, что, если удастся достаточно часто угадывать лучший ход при выборе очередных ходов на шагах вперед, то количество рассматриваемых при обходе позиций более или менее минимально.

Правило выбора очередного хода удобно формулировать обычным образом в терминах изображения дерева игры  $\mathfrak{A}$  на плоскости, как требование выбирать очередным ход, самый левый из всех возможных. Для того чтобы обход шел только по вершинам  $\mathfrak{A}_\beta \cup \mathfrak{A}_\alpha$ , нужно в каждой вершине  $B \in \mathfrak{A}_\beta$  с ходом белых самым левым сделать единственный ход  $(B, C) \in \mathfrak{A}_\beta$ , а в вершине  $B \in \mathfrak{A}_\alpha$  — ход  $(B, C) \in \mathfrak{A}_\alpha$ . В остальном порядок расположения дуг дерева  $\mathfrak{A}$ , выходящих из каждой вершины, т. е. правило выбора очередных ходов, произвольный. Таким образом, когда  $B$  принадлежит критической ветке  $W = \mathfrak{A}_\beta \cap \mathfrak{A}_\alpha$ , в первую очередь рассматривается ход из этой ветки. Поэтому в начале обхода будут пройдены вершины  $A_0, A_1, \dots, A_m$  ветки  $W$ , получена

$$\text{Гр}(A_m) = \text{оц}(A_m) = \text{оц}(A_0),$$

а затем время от времени будут делаться шаги назад вдоль ветки  $W$ .

Лемма о границах критической ветки. После шага назад в позицию  $A_k \in W$   $\text{Гр}(A_k) = \text{оц}(A_k) = \text{оц}(A_0)$ .

Действительно, часть обхода, начинающуюся с первого шага вперед из позиции  $A_k$  и кончающуюся первым шагом назад в нее, можно считать обходом для определения оценки начальной позиции  $A_k$  в игре  $\mathfrak{U}'(A_k)$ , дерево которой является открытым  $A_{k+1}$ -поддеревом дерева  $\mathfrak{U}$ , где ход  $(A_k, A_{k+1}) \in W$  (см. рис. 12). Следовательно, по теореме о границах после первого шага назад в позицию  $A_k$

$$\begin{aligned} \text{гр}(A_k) &= \text{оц}_{\mathfrak{U}'}(A_k)(A_k) = \\ &= \text{оц}_{\mathfrak{U}'}(A_k)(A_{k+1}) = \text{оц}(A_{k+1}) = \\ &= \text{оц}(A_0) = \text{оц}(A_k), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема об оптимальности обхода. Пусть  $A_k \in W$  — позиция с ходом белых. Тогда множества позиций и ходов, рассматриваемых при обходе после первого шага назад в  $A_k$  и до шага назад из  $A_k$ , принадлежат поддереву  $\mathfrak{U}_q$ .

Достаточно доказать, что множество рассматриваемых позиций и ходов, подчиненных каждой непосредственно следующей за  $A_k$  вершине  $B$ , не принадлежащей ветке  $W$ , принадлежит поддереву  $\mathfrak{U}_q$ . Так как  $A_k \in \mathfrak{U}_q$  и является позицией с ходом белых,  $B \in \mathfrak{U}_q$ . Рассмотрим часть обхода, начинающуюся после шага вперед с очередным ходом  $(A_k, B)$  и выясним, когда мы первый раз после этого попадем в не принадлежащую  $\mathfrak{U}_q$  позицию. Если мы находимся в некоторой позиции  $D \in \mathfrak{U}_q$  и делаем из нее шаг назад, то мы попадаем в непосредственно предшествующую позицию  $C$ , также принадлежащую  $\mathfrak{U}_q$ , так как  $(C, D)$  — единственный ход игры  $\mathfrak{U}$ , ведущий в позицию  $D$ . Если мы делаем первый шаг вперед из позиции  $D \in \mathfrak{U}_q$ , то попадаем в позицию  $E$ , также принадлежащую  $\mathfrak{U}_q$ , так как ход  $(D, E)$  — самый левый. Наконец, если мы делаем любой шаг вперед из позиции белых, также попадаем в вершину  $E \in \mathfrak{U}_q$ , так как все ходы из  $D$  ведут в позиции из  $\mathfrak{U}_q$ . Остается рассмотреть

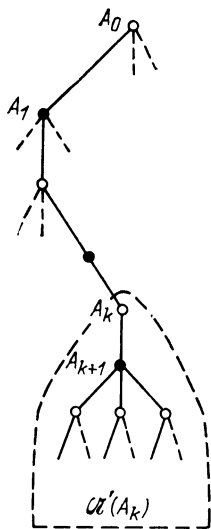


Рис. 12.

является позицией с ходом белых,  $B \in \mathfrak{U}_q$ . Рассмотрим часть обхода, начинающуюся после шага вперед с очередным ходом  $(A_k, B)$  и выясним, когда мы первый раз после этого попадем в не принадлежащую  $\mathfrak{U}_q$  позицию. Если мы находимся в некоторой позиции  $D \in \mathfrak{U}_q$  и делаем из нее шаг назад, то мы попадаем в непосредственно предшествующую позицию  $C$ , также принадлежащую  $\mathfrak{U}_q$ , так как  $(C, D)$  — единственный ход игры  $\mathfrak{U}$ , ведущий в позицию  $D$ . Если мы делаем первый шаг вперед из позиции  $D \in \mathfrak{U}_q$ , то попадаем в позицию  $E$ , также принадлежащую  $\mathfrak{U}_q$ , так как ход  $(D, E)$  — самый левый. Наконец, если мы делаем любой шаг вперед из позиции белых, также попадаем в вершину  $E \in \mathfrak{U}_q$ , так как все ходы из  $D$  ведут в позиции из  $\mathfrak{U}_q$ . Остается рассмотреть

случай, когда в подчиненную  $B$  позицию  $D \in \mathfrak{A}_\alpha$  с ходом черных сделан шаг назад (в частности,  $D$  может совпадать с  $B$ ).

При этом в позицию  $D$  приносится значение грани, равное оценке одной из заключительных позиций, рассмотренных после первого шага вперед из нее. Если мы после первого шага вперед из вершины  $B$  еще не выходили за пределы поддерева  $\mathfrak{A}_\alpha$ , то все оценки рассмотренных позиций были не больше чем  $\text{оц}(A_0)$ . Значит,  $\text{гр}(D) \leq \text{оц}(A_0)$ . Однако в этот момент по лемме о гранях критической ветки  $\text{гр}(A_k) = \text{оц}(A_0)$ , и мы должны сделать шаг назад по правилу отсечения, так как  $A_k$  — позиция ветки  $W'(A_0, \dots, D)$ , соединяющей начальную позицию  $A_0$  с очередной позицией  $D$ .

Таким образом, пока мы не вернемся в позицию  $A_k$ , и даже более того, пока из позиции  $A_k$  не будет сделан шаг назад, обход проходит только по позициям минимального по включению  $\alpha$ -усеченного поддерева  $\mathfrak{A}_\alpha$  игры  $\mathfrak{A}$ , что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что после первого шага назад в позицию критической ветки  $W$  с ходом черных и до шага назад из нее рассматриваются только позиции минимального по включению  $\beta$ -усеченного поддерева  $\mathfrak{A}_\beta$ . Таким образом, пока не возникнет необходимость сделать шаг назад из начальной позиции  $A_0$ , мы не выйдем за пределы объединения  $\mathfrak{A}_\beta \cup \mathfrak{A}_\alpha$ .

Выясним, сколько заключительных позиций достаточно рассмотреть, чтобы определить оценку начальной позиции, когда в игре  $\mathfrak{A}$  ходы делаются по очереди, т. е. каждый ход белых ( $B$ ,  $C$ ) ведет в позицию  $C$  с ходом черных и наоборот. Пусть, например, в начальной позиции  $A_0$ , единственной, имеющей нулевой ранг, ход белых. Тогда во всех позициях первого и, вообще, нечетных рангов ход черных, а в позициях четных рангов — ход белых. Оценку начальной позиции с использованием минимальной информации об оценках заключительных позиций можно получить в результате обхода. Сделаем еще несколько замечаний об этом процессе. Шаги назад и их очередные ходы можно разбить на три класса.

Если после шага назад с очередным ходом ( $B$ ,  $C$ ) значение  $\text{гр}(B)$  изменяется (всегда в желательном направлении для той стороны, чей ход в позиции  $B$ )

и становится или остается удовлетворяющим неравенствам

$$\underline{\lim} < \text{гр} (B) < \overline{\lim},$$

то такой шаг назад и его очередной ход  $(B, C)$  называются *улучшающими*. После улучшающего шага правило отсечения неприменимо.

Если  $\text{гр} (B)$  меняется настолько, что на следующем шаге нужно применить правило отсечения, то рассматриваемый шаг назад и его очередной ход  $(B, C)$  называются *закрывающими* (один из предшествующих ходов противника на ветке). После закрывающего шага значения  $\text{Гр} (B)$  и  $\text{Гр} (C)$  удовлетворяют условиям

$$\text{Гр} (B) = \text{Гр} (C) \begin{cases} \geq \overline{\lim}, & \text{если в позиции } B \text{ ход белых,} \\ \leq \underline{\lim}, & \text{если в позиции } B \text{ ход черных.} \end{cases}$$

В остальных случаях шаг назад и его очередной ход  $(B, C)$  называются *плохими*, хотя на самом деле плохим мог быть один из предшествующих ходов того же цвета на ветке. После шага назад из позиции  $C$  выполняются условия:

$$\text{Гр} C \begin{cases} \leq \text{гр} (B) < \overline{\lim}, & \text{если в позиции } B \text{ ход белых,} \\ \geq \text{гр} (B) > \underline{\lim}, & \text{если в позиции } B \text{ ход черных.} \end{cases}$$

Значит, на следующем шаге правило отсечения неприменимо, как и после улучшающего хода.

Дальнейшие рассуждения мы будем проводить для позиций с ходом белых или для ходов белых. В них можно поменять местами белый и черный цвета, параметры  $\underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$ , символы неравенств  $<$  и  $>$  и т. д. Пусть  $(B, C)$  — очередной ход для некоторого шага обхода. Тогда ветка  $W' (A_0, \dots, B, C)$ , ведущая из начальной позиции  $A_0$  в позицию  $C$ , является продолжением ветки  $W (A_0, \dots, B)$  из  $A_0$  в  $B$ . Следовательно, множества позиций этих веток с ходами одного цвета, определяющие значения  $\underline{\lim} (B)$ ,  $\overline{\lim} (B)$ ,  $\underline{\lim} (C)$ ,  $\overline{\lim} (C)$ , удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} B (C) &= B (B) \cup B, \\ Ч (C) &= Ч (B). \end{aligned}$$

Если  $(B, C)$  — улучшающий ход, то перед шагом назад из позиции  $C$  выполняется неравенство  $\Gamma p(C) > \text{гр}(B)$ , а после него — неравенство  $\underline{\lim}(B) < \text{гр}(B) = \Gamma p(C) < \overline{\lim}(B)$ . Значит, перед рассматриваемым шагом

$$\begin{aligned} \overline{\lim}(C) &= \min_{A \in \mathcal{U}(C) = \mathcal{U}(B)} \text{гр}(A) = \overline{\lim}(B) > \Gamma p(C) > \\ &> \max(\text{гр}(B), \underline{\lim}(B)) = \max(\text{гр}(B), \max_{A \in \mathcal{B}(B)} \text{гр}(A)) = \\ &= \max_{A \in \mathcal{B}(B) \cup B = \mathcal{B}(C)} \text{гр}(A) = \underline{\lim} C. \end{aligned}$$

По теореме о гранях позиций после шага назад из  $C$   $\Gamma p(C) = \text{оц}(C)$ . Таким образом, улучшающие ходы ведут в позиции, оценки которых при обходе определяются. Эти позиции будем называть *псевдокритическими*.

Если  $(B, C)$  — закрывающий ход, то после шага назад из позиции  $C$

$$\Gamma p(C) = \Gamma p(B) \geq \overline{\lim}(B) = \overline{\lim}(C).$$

Следовательно, по теореме о гранях позиций после шага назад из  $C$

$$\text{оц}(B) \geq \overline{\lim}(B) \quad \text{и} \quad \text{оц}(C) \geq \overline{\lim}(B) = \overline{\lim}(C),$$

т. е. позиция  $B$  недопустима для противника, а позиция  $C$  — для своего цвета ( $C$  — позиция с ходом черных).

Если  $(B, C)$  — плохой ход, то перед шагом назад из  $C$  либо  $\Gamma p(C) \leq \Gamma p(B)$ , либо  $\Gamma p(C) \leq \underline{\lim}(B)$ . Следовательно,

$$\Gamma p(C) \leq \max(\Gamma p(B), \underline{\lim}(B)) = \underline{\lim}(C),$$

и по теореме о гранях позиций  $\text{оц}(C) \leq \underline{\lim}(C)$ , т. е. позиция  $C$  недопустима для противника.

Множества  $E$  — псевдокритических,  $F$  — недопустимых для противника и  $G$  — недопустимых для своего цвета позиций разбиваются на подмножества позиций данного ранга:  $E = \bigcup E_i$ ,  $F = \bigcup F_i$ ,  $G = \bigcup G_i$ .

Малыми буквами  $e_i$ ,  $f_i$  и  $g_i$  обозначим количества элементов соответствующих множеств  $E_i$ ,  $F_i$  и  $G_i$ . Начальная позиция  $A_0$  принадлежит критической ветке. Следовательно,

$$E_0 = \{A_0\}, \quad F_0 = G_0 = \emptyset, \quad e_0 = 1, \quad f_0 = g_0 = 0.$$

Теорема об очередных ходах. Все ходы из позиций множества  $G_i$  ведут в позиции множества  $F_{i+1}$ , а из позиций множества  $E_i$  — в позиции множества  $E_{i+1} \cup G_{i+1}$  и, значит, все ходы из позиций множества  $E_i \cup G_i$  ведут в позиции множества  $E_{i+1} \cup F_{i+1}$ . Из каждой незаключительной позиции  $B \in E_i$  хотя бы один ход ведет в позицию множества  $E_{i+1}$ , а из каждой незаключительной позиции  $B \in F_i$  ровно один закрывающий ход ведет в множество  $G_{i+1}$  (см. рис. 13).

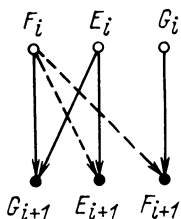


Рис. 13.

Доказательство. Если  $B \in E_i \cup G_i$  — незаключительная позиция,  $(B, C)$  — очередной ход шага назад в  $B$ ,  $\text{гр}(B)$  — значение грани позиции  $B$  после этого шага назад и  $\overline{\text{гр}}(B)$  — последнее ее значение, то

$$\text{гр}(C) \leq \text{гр}(B) \leq \overline{\text{гр}}(B) < \overline{\lim}(B) = \overline{\lim}(C).$$

Позиция  $C$  принадлежит  $E_{i+1} \cup G_{i+1}$ , так как в ней ход черных и  $\text{гр}(C) < \overline{\lim}(C)$ . Кроме того, ни при каком возврате в  $B$  нельзя применить правило отсеечения, и, значит, этому множеству принадлежат все непосредственно следующие за  $B$  позиции. Если  $B \in G_i$ , то выполняются более сильные условия. После шага вперед в  $B$   $\text{гр}(B)$  получает значение  $-\infty < \underline{\lim}$ . Если перед некоторым шагом назад в  $B$  выполняется неравенство  $\text{гр}(B) \leq \underline{\lim}(B)$ , то

$$\text{гр}(C) \leq \text{гр}(B) \leq \underline{\lim}(B) = \max(\text{гр}(B), \underline{\lim}(B)) = \underline{\lim}(C),$$

т. е.  $C \in F_{i+1}$ . Если, наконец,  $B \in E_i$  и  $(B, C)$  — ход, определяющий последнее значение  $\text{гр}(B)$ , то

$$\text{гр}(C) = \text{гр}(B) \geq \overline{\lim}(B) = \overline{\lim}(C),$$

т. е.  $C \in G_{i+1}$ . При предыдущих шагах назад в  $B$  из непосредственно следующих позиций  $C'$  выполнялись условия

$$\text{гр}(C') < \text{гр}(B) = \overline{\lim}(C').$$

Значит,  $C \notin G_{i+1}$ , и из позиции  $B$  в множество  $G_{i+1}$  ведет ровно один ход.

Пусть теперь обход оптимальный, т. е. самые левые ходы из позиций множества  $E$  — лучшие, а из позиций

множества  $F$  — закрывающие. Тогда после первого же шага назад в позицию  $B \in E_i$  с очередным ходом  $(B, C)$

$$\text{гр}(B) = \max(-\infty, \text{Гр}(C)) = \max_{(B, C') \in \mathfrak{A}} \text{Гр}(C') = \text{Гр}(B),$$

а после следующих шагов с очередными ходами  $(B, C')$

$$\text{Гр}(C') \leq \text{Гр}(B) \leq \max_{A \in B(C')} \text{гр}(A) = \underline{\lim}(C),$$

т. е. ходы  $(B, C)$  — плохие. После первого шага назад в позицию  $B \in F_i$  с очередным ходом  $(B, C)$   $\text{гр}(B) \geq \overline{\lim}(B)$ , т. е. на следующем шаге нужно применить правило отсечения. Таким образом, картину связей

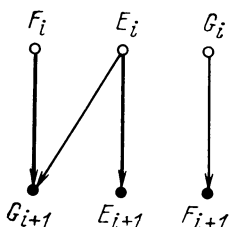


Рис. 14.

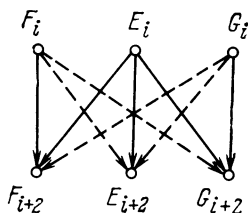


Рис. 15.

между множествами  $E_i, F_i, G_i$  и  $E_{i+1}, F_{i+1}, G_{i+1}$ , изображенную на рис. 13, нужно несколько откорректировать (см. рис. 14, на котором жирно отмечены имеющиеся в каждой незаключительной позиции единственные ходы).

Рассмотрим три идущие подряд ранга:  $i$ -й,  $(i+1)$ -й и  $(i+2)$ -й. На рис. 15 показано, какие ходы могут быть в каждой позиции множеств  $E_i, F_i, G_i, E_{i+1}, F_{i+1}$  и  $G_{i+1}$  (пунктиром — не рассматриваемые ходы из позиций множества  $F$ ). Все ходы из множества  $E_i \cup G_i$  ведут в множество  $E_{i+1} \cup F_{i+1}$ , а из множества  $F_i$  или ведут в множество  $G_{i+1}$ , или не рассматриваются. Следовательно, среднее число ходов из позиций множества  $E_i \cup G_i$  равно  $\mu_i = \frac{e_{i+1} + f_{i+1}}{e_i + f_i}$ .

Из каждой незаключительной позиции множества  $E_{i+1} \cup F_{i+1}$  делается один ход в множество  $E_{i+2} \cup G_{i+2}$  (из  $E_{i+1}$  в  $E_{i+2}$ , а из  $F_{i+1}$  в  $G_{i+2}$ ), причем иным способом

позиции последнего множества не возникают. Следовательно, доля незаключительных позиций в множестве  $E_{i+1} \cup G_{i+1}$  равна

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{e_{i+2} + g_{i+2}}{e_{i+1} + f_{i+1}} \leq 1.$$

Таким образом,

$$e_{i+2} + g_{i+2} = \mu_{i+1} \varepsilon_{i+1} (e_{i+1} + f_{i+1}),$$

откуда следует, что

$$e_i + g_i = \prod_{j=1}^{\lfloor i/2 \rfloor} \varepsilon_{i-2j+1} \mu_{i-2j},$$

$$e_i + f_i = \mu_{i-1} \prod_{j=1}^{\lfloor (i-1)/2 \rfloor} \varepsilon_{i-2j} \mu_{i-2j-1}.$$

В рассматриваемом случае оптимального обхода очередными являются только позиции минимальных по включению б- и ч-усеченных поддеревьев  $\mathfrak{A}_b$  и  $\mathfrak{A}_c$ , которые пересекаются по критической ветке  $W$ , причем только позиции этой ветки принадлежат множеству  $E$ . Следовательно, значения  $e_i$  при  $i \leq l$ , где  $l$  — ранг заключительной позиции ветки  $W$ , равны 1, а при  $i > l$  равны 0. Если правила выбора очередного хода для рассматриваемого шага вперед не направлены специально на уменьшение значений  $\mu_i$ , то последние обычно близки к средним количествам  $v_i$  всех ходов из позиций  $i$ -го ранга. Кроме того, среди позиций не максимального ранга в некоторых интересующих нас случаях почти нет заключительных (в дальнейшем мы увидим, что этим свойством обладают многие модельные игры, в которые играют программы). Тогда  $\varepsilon_i \approx 1$ ,  $\ln \varepsilon_i \approx 0$  и, предполагая еще приблизительное равенство средних значений  $\ln v_i$  по четным и нечетным рангам, а также существенное ветвление деревьев  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}_b$  и  $\mathfrak{A}_c$ , при котором число всех позиций в них по порядку такое же, как число позиций максимального ранга, можно показать, что количество рассматриваемых при оптимальном обходе позиций близко по порядку к квадратному корню из количества всех позиций дерева игры  $\mathfrak{A}$ . Действительно, пусть  $h_i$  — число позиций этого дерева ранга  $i$ ,  $\bar{\ln} \mu$  и  $\bar{\ln} v$  — средние по рангам значения  $\ln \mu_i$  и  $\ln v_i$ ,  $k$  —

максимальный ранг игры  $\mathfrak{A}$ . Тогда

$$\ln(e_k + f_k) = \ln \mu_{k-1} + \sum_{i=1}^{\lceil (k-1)/2 \rceil} (\ln \varepsilon_{i-2j} + \ln \mu_{i-2j-1}) \approx \\ \approx \frac{k}{2} \bar{\ln} \mu + O(k) \approx \frac{k}{2} \bar{\ln} v + O(k),$$

$$\ln(e_k + g_k) = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} (\ln \varepsilon_{i-2j+1} + \ln \mu_{i-2j}) \approx \\ \approx \frac{k}{2} \bar{\ln} \mu + O(k) \approx \frac{k}{2} \bar{\ln} v + O(k),$$

$$\ln(e_k + f_k + g_k) \leq \ln(2 \max(e_k + f_k, e_k + g_k)) \approx \\ \approx \frac{k}{2} \bar{\ln} \mu + O(k) \approx \frac{k}{2} \bar{\ln} v + O(k),$$

$$\ln h_k = \sum_{j=0}^{k-1} \ln v_j = k \ln v,$$

где  $\lceil x \rceil$  — ближайшее целое число, не превосходящее  $x$  (обозначение Кнута [19]), и всюду  $O(k) < \lambda k$  при  $\lambda \ll 1$ . Следовательно,

$$h_k = e^{k \bar{\ln} v},$$

$$e_k + f_k + g_k \sim e^{\frac{k}{2} \bar{\ln} v + O(k)} = (\sqrt{n_k} (1 + \lambda))^k,$$

где  $\lambda \ll 1$ .

Этот вывод можно уточнить для совершенно равномерной игры  $\mathfrak{A}_{k,m}$ , в которой все позиции 0-го, 1-го, ..., ...,  $(k-1)$ -го рангов — незаключительные с одним и тем же количеством ходов  $m$ , которые можно из них сделать, а позиции  $k$ -го ранга — заключительные. Для такой игры

$$e_i = 1,$$

$$f_i = \mu_{i-1} \prod_{j=1}^{\lceil (i-1)/2 \rceil} \varepsilon_{i-2j} \mu_{i-2j-1} - 1 = m^{\lceil (i+1)/2 \rceil} - 1,$$

$$g_i = \prod_{j=1}^{\lfloor i/2 \rfloor} \varepsilon_{i-2j+1} \mu_{i-2j} - 1 = m^{\lfloor i/2 \rfloor} - 1, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Таким образом, число заключительных позиций, определяющих оценку начальной позиции, равно  $\lceil (k+1)/2 \rceil + \lceil k/2 \rceil - 1$ , а число всех позиций в объединении минимальных  $b$ - и  $c$ -усеченных поддеревьев

$$\frac{m^{\lceil (k+3)/2 \rceil} + 2m^{\lceil (k+2)/2 \rceil} + m^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}}{m-1} - \left( k + 2 - \frac{2}{m-1} \right).$$

Всего позиций дерева игры  $\mathfrak{A}_{m,k}$  имеется  $M = \frac{m^{k+1}-1}{m-1}$ . Значит, минимальное число рассматриваемых при обходе позиций имеет порядок  $\sqrt[k]{M}$ , когда  $k$  четно, и  $\sqrt[k]{mM}$ , когда  $k$  нечетно.

Если лучшие и закрывающие ходы угадываются не сразу, то приходится рассматривать большее количество позиций. Можно показать, что оно равно  $(cm)^{\bar{k}/2}$ , где  $\bar{k}$  — усредненная некоторым образом глубина дерева,  $\bar{m}$  — среднее число ходов в позициях, а  $c > 1$  имеет порядок суммы среднего числа улучшающих ходов в позициях множества  $E$  и не закрывающих в позициях множества  $F$ . Мы ограничимся определением математического ожидания количества рассматриваемых позиций при обходе дерева совершенно равномерной игры  $\mathfrak{A}_{m,k}$ , когда количества улучшающих ходов во всех позициях  $B \in E$  — независимые случайные величины с математическим ожиданием  $\gamma$  (естественно,  $\gamma \geq 1$ ), а количества улучшающих и плохих ходов в позициях  $B \in F$  также независимы и имеют математические ожидания  $\delta$  и  $\varepsilon$ . Из независимости этих случайных величин следует, что математические ожидания количеств позиций в деревьях складываются из математических ожиданий количеств позиций в их поддеревьях так же, как и индивидуальные значения этих количеств в каждом конкретном случае.

Пусть  $\Omega_i$  — математическое ожидание числа заключительных позиций в  $B$ -поддереве дерева обхода для позиций  $B \in E_i$ ,  $\Phi_i$  — та же величина для позиций  $B \in F_i$  и  $\Psi_i$  — для  $B \in G_i$ . Тогда

$$\Omega_0 = \Phi_0 = \Psi_0 = 1,$$

$$\Omega_{i-1} = \gamma\Omega_i + (m - \gamma)\Phi_i,$$

$$\Phi_{i-1} = \delta\Omega_i + \varepsilon\Phi_i + \Psi_i,$$

$$\Psi_{i-1} = m\Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Система  $3k$  последних уравнений является линейной, однородной с  $3k + 3$  неизвестными и имеет ранг  $3k$ . Следовательно, достаточно найти 3 ее линейно независимых решения. Мы будем искать их в виде

$$\Omega_i = \Omega t^{k-i}, \quad \Phi_i = \Phi t^{k-i}, \quad \Psi_i = \Psi t^{k-i}.$$

Подстановка этих значений в уравнения дает

$$\Omega t = \gamma \Omega + (m - \gamma) \Phi,$$

$$\Phi t = \delta \Omega + \varepsilon \Phi + \Psi,$$

$$\Psi t = m \Phi.$$

Чтобы эти уравнения имели ненулевое решение, определитель

$$\begin{vmatrix} t - \gamma & -(m - \gamma) & 0 \\ -\delta & t - \varepsilon & -1 \\ 0 & -m & t \end{vmatrix} =$$

$$= t^3 - (\gamma + \varepsilon) t^2 - [m(1 + \delta) - \gamma(\delta + \varepsilon)] t + \gamma m$$

должен быть равен 0.

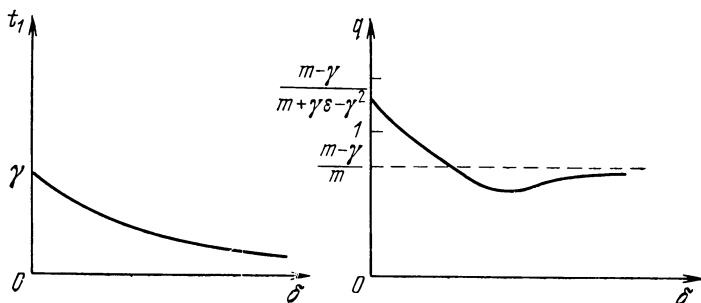


Рис. 16.

Так как  $1 \leq \gamma \leq m$ , один из корней уравнения

$$t^3 - (\gamma + \varepsilon) t^2 - [m(1 + \delta) - \gamma(\delta + \varepsilon)] t + \gamma m = 0$$

(мы обозначим его  $t_1$ ) должен быть расположен в полуинтервале  $(0, \gamma]$ . При этом

$$q\delta = \frac{m - \gamma}{m + \varepsilon t_1 - t_1^2} \delta = \frac{\gamma - t_1}{t_1}.$$

В интересующих нас случаях  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  много меньше  $m$ . Тогда зависимость  $t_1$  и  $q$  от  $\delta$  имеет вид, изображенный на рис. 16, причем  $q \approx 1$ . Значение  $t_1$  удобно выразить через  $q$ :

$$t_1 = \frac{\gamma}{1 + q\delta}.$$

Второй и третий корни являются решениями квадратного уравнения

$$t^2 - (\gamma + \varepsilon - t_1) t - \frac{\gamma m}{t_1} = 0$$

и равны

$$t_{2,3} = \frac{\gamma q \delta + \varepsilon (1 + q \delta)}{2 (1 + q \delta)} \pm \sqrt{m (1 + q \delta) + \left( \frac{\gamma q \delta + \varepsilon (1 + q \delta)}{2 (1 + q \delta)} \right)^2}.$$

Таким образом, общее решение рассматриваемой системы уравнений имеет вид

$$\Omega_i = \Omega^{(1)} t_1^{k-i} + \Omega^{(2)} t_2^{k-i} + \Omega^{(3)} t_3^{k-i},$$

$$\Phi_i = \Phi^{(1)} t_1^{k-i} + \Phi^{(2)} t_2^{k-i} + \Phi^{(3)} t_3^{k-i},$$

$$\Psi_i = \Psi^{(1)} t_1^{k-i} + \Psi^{(2)} t_2^{k-i} + \Psi^{(3)} t_3^{k-i},$$

где

$$\Phi^{(1, 2, 3)} = \frac{t_{1, 2, 3} - \gamma}{m - \gamma} \Omega^{(1, 2, 3)},$$

$$\Psi^{(1, 2, 3)} = \frac{m}{m - \gamma} \frac{t_{1, 2, 3} - \gamma}{t_{1, 2, 3}} \Omega^{(1, 2, 3)}.$$

Значения  $\Omega^{(1, 2, 3)}$  можно найти из условий  $\Omega_k = \Phi_k = \Psi_k = 1$ .

Таким образом, математическое ожидание числа рассматриваемых заключительных позиций дерева  $\mathfrak{M}_{m, k}$  равно

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & \frac{(m - t_2) (m - t_3)}{m (t_1 - t_2) (t_1 - t_3)} t_1^{k+1} + \frac{(m - t_1) (m - t_3)}{m (t_2 - t_1) (t_2 - t_3)} t_2^{k+1} + \\ & + \frac{(m - t_1) (m - t_2)}{m (t_3 - t_1) (t_3 - t_2)} t_3^{k+1}. \end{aligned}$$

## ГЛАВА 2

# ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИГРОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### § 1. Ограничение глубины перебора и оценочные функции

Цель игровой программы — для каждой представленной ей позиции игры дать рекомендацию, какой сделать ход. При этом не обязательно, чтобы он был лучшим, например, в смысле определения предыдущей главы. Рекомендуемый ход должен иметь как можно более высокое качество с точки зрения профессиональных игроков и выбираться за заранее ограниченное время. Однако любой алгоритм выбора хода в позициях данной игры можно считать алгоритмом выбора лучшего хода в начальной позиции дерева некоторой другой игры, называемой *модельной*. Дерево модельной игры является поддеревом дерева исходной с той же начальной позицией.

При построении модельной игры мы можем поставить цель найти, по возможности, лучший ход в исходной игре или руководствоваться другими соображениями (о которых кое-что уже было сказано). Как практически во всех исследованиях по игровому программированию, будет предполагаться, что требуется найти лучший ход. Можно пользоваться обходом позиций дерева игры, полным или с отсечениями. В процессе такого или аналогичных алгоритмов строятся  $\beta$ - и  $\alpha$ -усеченные поддеревья дерева исследуемой игры с корнем в начальной позиции. Следовательно, время их работы по порядку не меньше, чем количество позиций

в этих поддеревьях. Нас интересуют игры с сильно ветвящимися деревьями, такими, что обход даже при максимальных отсечениях не может быть завершен за допустимое время. Имеются два пути его сокращения: построение модельных игр возможно меньшего объема (меньшего количества позиций в изучаемых поддеревьях) и совершенствование методов определения лучшего хода при фиксированном дереве игры.

В дальнейшем речь будет идти о методах, основанных на использовании содержательных свойств рассматриваемых игр. Их применение позволяет выбирать более или менее удовлетворяющие нас ходы. Алгоритмы выбора хода в произвольной игре, существенно более эффективные, чем обход с отсечениями, должны обходиться без построения *b*- и *c*-усеченных поддеревьев (может быть, предварительного и неявного). Для такого алгоритма нужно точно определить, в каком смысле мы будем считать выбираемые ходы *неплохими*. Если он детерминированный, то по теореме о расширениях дерева игры можно указать игру, в выигранных позициях которой он будет всегда проигрывать не делающему ошибок противнику (если же этот алгоритм включает случайные действия, то он будет проигрывать почти всегда). Значит, понятие *неплохой ход* не может относиться к каждой конкретной игре.

Рассматриваемый метод мы будем называть *точным*, когда доказывается, что он правильно решает поставленную задачу, и *эвристическим* \*), когда такого доказательства нет (может быть, пока). Таким образом, точный метод построения модели конструирует игру, эквивалентную исходной, т. е. лучшие ходы в начальных позициях ее деревьев являются лучшими и в соответствующих позициях исходной игры. Метод ускорения выбора лучшего хода в начальной позиции фиксированного дерева игры можно назвать точным, если есть доказательство того, что его применение действительно приводит к сокращению перебора, т. е. уменьшению количества рассматриваемых позиций.

Мы начнем с эвристических методов, которые пока являются более разработанными. Впервые один из них

---

\*) Наименование *эвристический* употребляется в различных взаимно исключающих друг друга смыслах, и авторы сочли себя в праве выбрать тот, который им нравится.

был описан Шенноном [39]. В дереве игры с корнем в данной позиции он предложил рассматривать только позиции малых рангов. Таким образом, алгоритм Шеннона имеет параметр  $n$  — глубину перебора, т. е. максимальный ранг исследуемых позиций. Все позиции  $n$ -го ранга объявляются заключительными. Значит, должны быть определены их оценки, которые, естественно, могут не совпадать с неизвестными нам истинными. Выбирается набор учитываемых признаков позиции из множества рассматриваемых теорией данной игры. В статье Шеннона речь идет о шахматной программе и таких признаках, как соотношение материала, слабые и сильные поля, удары фигур на них, элементы пешечной структуры и т. д.

Оценка заключительной позиции модели должна быть равна значению некоторой не слишком сложно вычисляемой функции множества признаков, которыми она обладает. Разумеется, настоящая заключительная позиция игры является заключительной и в модели, причем выигранные и проигранные позиции имеют крайние оценки, а ничья — среднюю. Рассматриваемую функцию можно вычислить для любой позиции игры. Мы будем называть ее *оценочной* и займемся сравнением моделей с перебором на различную глубину, но с одной и той же оценочной функцией. Так как дерево игры в шахматы конечно, при достаточной глубине  $n$  дерево модели Шеннона будет с ним совпадать. В таком случае будет выбран настоящий лучший ход.

С другой стороны, если бы у нас была возможность вычислить оценочную функцию, равную истинной оценке позиции, то достаточно производить перебор на глубину  $n=1$ . Часто это называется *считать на один полуход* (имеется в виду, что целым ходом называется совокупность последовательных ходов белых и черных). Какой же смысл производить перебор на глубину  $n > 1$ , но не доводить его до конца? Конечно, выигрыши и проигрыши за небольшое число ходов, так сказать, «катастрофы», будут замечены. Однако этого совершенно недостаточно для того, чтобы играть сколько-нибудь прилично. Если оценочная функция только и может, что отличить позицию после произошедшей катастрофы от позиции до нее, то ни на что другое рассчитывать и нельзя. Однако при некоторых предположениях о ха-

рактуре игры и свойствах оценочной функции можно доказать, что качество игры монотонно улучшается с ростом глубины перебора даже при отсутствии катастроф.

Ниже будет описана некоторая идеализированная игра и произведено «наивное» вероятностное обоснование эффективности выбора лучшего хода в ее позициях с помощью модели Шеннона. Пусть  $\mathfrak{A}$  — совершенно равномерная игра, т. е. белые и черные ходят по очереди, из незаключительных позиций можно сделать одно и то же количество ходов  $m$ , а заключительные позиции имеют одинаковый (и достаточно большой) ранг  $N$ . Пусть, кроме того, количество выигрывающих ходов в каждой позиции, где они есть, одинаково и равно 3, а заключительные позиции имеют оценки, равные 0 или 1. Относительно оценочной функции  $f(A)$  мы предположим, что она является случайной величиной, причем для выигранных позиций с ходом белых (черных) с вероятностью  $p$   $f(A) = 1$  (0) и с вероятностью  $(1 - p)$   $f(A) = 0$  (1); для проигранных позиций те же вероятности равны  $q < p$  и  $(1 - q)$ . Для разных позиций  $A$  значения  $f(A)$  — независимые случайные величины. Легко видеть, что в нашей игре никаких катастроф не бывает.

Как обычно, мы будем считать начальную позицию  $A_0$  позицией с ходом белых. Игровая программа, пользующаяся моделью Шеннона, не выбирает ошибочного хода, во всяком случае тогда, когда позиция  $B$ , возникающая в игре  $\mathfrak{A}$  после некоторого выигрывающего хода, получает в этой модели оценку 1, а все позиции  $B'$ , куда ведут проигрывающие ходы ( $A_0, B'$ ), получают оценки, равные 0. Итак, нужно определить вероятности оценок 1 и 0 в модели Шеннона глубины  $n$  для выигранных и проигранных в исходной игре  $\mathfrak{A}$  позиций, имеющих ранг 1.

Рассмотрим сначала модель Шеннона глубины 1 (при меньшей из позиций  $B$  ранга 1, оценки которых сравниваются между собой для выбора лучшего хода, перебор не производится). Если для позиции ранга 1

$$\text{моц}(B) = \min_{(B, C) \in \mathfrak{A}} f(C) = 1,$$

то значения оценочной функции  $f(C)$  для всех непосредственно следующих за  $B$  позиций  $C$  равны 1. Вслед-

ствие независимости этих случайных величин для разных позиций  $C$  вероятность этого события равна произведению вероятностей каждого события  $f(C_i) = 1$  (как показано на рис. 17,  $C_1, C_2, \dots, C_m$  — позиции, непосредственно следующие за  $B$ ):

$$P(\min_{(B, C) \in \mathfrak{A}} f(C) = 1) = \\ = P(f(C_1) = 1) \cdot P(f(C_2) = 1) \dots P(f(C_m) = 1).$$

Заметим еще, что во всех позициях  $C_1, C_2, \dots, C_m$  ход черных.

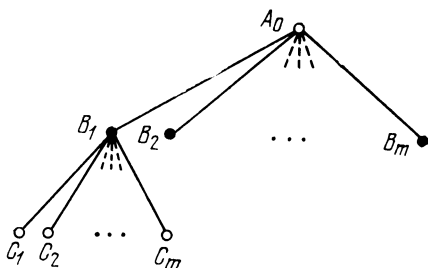


Рис. 17.

Когда позиция  $B$  выиграна за белых в исходной игре, рассматриваемую вероятность мы будем обозначать  $1 - Q_1$ , иначе  $1 - P_1$  (при таких обозначениях естественно считать, что  $P_0 = p$ ,  $Q_0 = q$ ). В первом случае все позиции  $C_1, C_2, \dots, C_n$  тоже выиграны за белых. Следовательно,

$$1 - Q_1 = p^m.$$

Во втором —  $s$  позиций выиграны за черных, остальные за белых, и

$$1 - P_1 = p^{m-s} q^s.$$

Пусть  $P_n$  — вероятность получить оценку 1 в начальной позиции  $A_0$  модельной игры Шеннона, если в исходной игре позиция  $A_0$  — выигранная (как всегда, мы считаем, что  $A_0$  — позиция с ходом белых), а  $Q_n$  — вероятность получить оценку 1, если она проигранная. Тогда вероятность того, что позиция  $C_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) рис. 17 в модели Шеннона глубины  $n+1$  получит оценку 1,

равна  $P_n$ , если  $C_i$  на самом деле выигранная позиция, и  $Q_n$ , если проигранная. Аналогично тому, как для модели глубины 2:

$$\begin{aligned} 1 - Q_{n+1} &= P_n^m, \\ 1 - P_{m+1} &= P_n^{m-s} Q_n^s. \end{aligned}$$

Если  $P_n$  достаточно близко к 1, а  $Q_n$  — к 0, то  $P_{n+1}$  будет еще больше, а  $Q_{n+1}$  — еще меньше. Таким образом, вероятность получить правильные оценки позиций, и, значит, найти лучший ход с увеличением глубины перебора  $n$ , будет стремиться к 1, причем эта вероятность станет практически равна 1 при  $n \ll N$ . Например, при  $m=10$ ,  $s=2$ ,  $p=0,99$ ,  $q=0,1$  значения  $P_n$  и  $Q_n$  даны в табл. 1. Однако если  $p$  чуть-чуть меньше 0,99 или  $q$  несколько больше 0,1, то  $P_n$  и  $Q_n$  не будут стремиться к пределам. После некоторого количества колебаний они при четных или нечетных  $n$  обе будут приближаться к 1, а при  $n$  другой четности — к 0.

Полученный нами результат — увеличение надежности решения, принятого в результате исследования модели Шеннона с ростом глубины перебора — следует из важного свойства рассматриваемых игр — того, что в выигранных позициях, как правило, есть не один выигрывающий ход, а также из возможности построить не очень сложно вычисляемую оценочную функцию, хорошо коррелированную с истинной оценкой. По-видимому, оба эти свойства необходимы для того, чтобы можно было рассчитывать на хороший эффект применения модели Шеннона или аналогичных, о которых будет говориться, например, в § 3 данной главы. Может быть, для некоторых игр удастся строго доказать или опровергнуть выполнение этих условий. Пока такого доказательства нет, единственный способ проверить их выполнение — статистический.

Жесткие требования к параметрам  $p$  и  $q$ , определяющим корреляцию значений оценки и оценочной функции, не должны обескураживать. Они связаны с принятыми упрощениями, в частности, с предположением о независимости значений оценочных функций для позиций до и после хода, а также с малой дифференцированностью этих значений (только 0 и 1). Кроме того, следует иметь в виду, что одни лишь качествен-

ные достижения при построении оценочных функций, т. е. положительная корреляция ее с истинной оценкой, могут не принести пользы (не говоря уже о том, что требуемая глубина перебора зависит от степени этой корреляции и учета обстоятельств, которые нельзя считать случайными). Мы еще вернемся к затронутым вопросам в гл. 4.

Т а б л и ц а 1

Вероятности правильных модельных оценок  
для модельных игр Шеннона

О б о з н а ч е н и я

- $m$  — количество всех ходов из незаключительных позиций,  
 $s$  — количество выигрывающих ходов из выигранных незаключительных позиций,  
 $n$  — глубина модели,  
 $P_n$  — вероятность выигрыша в модельной игре для выигранных в исходной игре позиций,  
 $Q_n$  — вероятность выигрыша в модельной игре для проигранных в исходной игре позиций.

$m = 10, \quad s = 2$						
$n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n$	$Q_n$
0	0,9900	0,1000	0,9900	0,1200	0,9880	0,1000
1	0,9908	0,0956	0,9867	0,0956	0,9909	0,1137
2	0,9915	0,0885	0,9918	0,1252	0,9880	0,0872
3	0,9927	0,0817	0,9853	0,0792	0,9931	0,1139
4	0,9937	0,0709	0,9944	0,1374	0,9877	0,0669
5	0,9952	0,0612	0,9819	0,0543	0,9959	0,1162
6	0,9964	0,0467	0,9974	0,1666	0,9869	0,0398
7	0,9979	0,0355	0,9728	0,0252	0,9986	0,1234
8	0,9988	0,0210	0,9995	0,2410	0,9850	0,0142
9	0,9996	0,0123	0,9421	0,0051	0,9998	0,1407
10	0,9998	0,0044	0,999 8	0,4490	0,9802	0,0018

Оценочная функция может быть коррелирована не только с истинными оценками соответствующих позиций. Если в некоторой позиции выигрыш достигается за 10 ходов, а в другой — всего за 4 хода, то оценки этих позиций одинаковы. Однако для игроков они не равноценны, и всегда лучше выбрать ход, при котором желательный результат достигается в более короткое время. Поэтому можно определить оценочную функцию

так, чтобы обстоятельства, приближающие к концу партии, увеличивали оценку (в случае, когда мы рассчитываем выиграть). Особенно важно иметь такие значения оценочной функции для позиций, в которых с точки зрения теории игр выигрыш обеспечен (это не значит, что можно дать строгое доказательство выигрыша).

Например, в легко выигранных шахматных окончаниях, где дается мат одинокому королю, можно не упустить выигрыш (пока не вступит в силу правило тоекратного повторения позиции или 50 ходов). Однако даже при оценочной функции, совпадающей с истинной оценкой, нельзя гарантированно дать мат при глубине перебора  $n \leq 10$ . В то же время, если оценочная функция будет принимать лучшие для атакующей стороны значения, когда одинокий король находится ближе к краю доски и ее углам (для мата конем и слоном — к углам соответствующего цвета), а король атакующей стороны — ближе к королю противника, то выигрывает программа с глубиной перебора  $n = 4$ , причем 4-й полуход нужен лишь для проверки, не достигнут ли на 3-м полуходу мат или пат. Для мата двумя легкими фигурами нужны еще специально подобранные оценки небольшого числа стандартных позиций с королем противника в углу доски или вблизи от него.

Как было указано, оценочная функция должна быть сравнительно легко вычисляемой. Самый простой вид такой функции — линейный. Мы определяем набор признаков позиции — предикатов  $p_i(A)$ , равных 1, если позиция  $A$  обладает  $i$ -м признаком и 0 в противном случае. Если  $q_i$  — веса этих признаков ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), то оценочная функция определяется формулой

$$\Phi(A) = \sum_{i=1}^N q_i p_i(A),$$

причем веса  $q_i$  могут быть и положительными, и отрицательными; можно показать, что даже в случае очень простой игры, когда набор учитываемых признаков — полный, не существует линейной оценочной функции, монотонно связанной с истинными оценками позиций [22]. Поэтому естественным является вопрос об усложнении способов вычисления оценочной функции. Однако определение модельных оценок позиций по формуле

Цермело, исходя из значений оценочной функции в псевдозаключительных позициях, тоже является способом вычисления некоторой оценочной функции и можно применять лишь значительно менее трудоемкие способы.

Один из примеров нечрезмерного усложнения методов вычисления оценочной функции — использование пороговой логики. Кроме исходного множества признаков — системы предикатов  $\{p_i(A)\}_1^n$  — рассматривается множество оценочных функций  $\left\{\Phi_j(A) := \sum_{i=1}^N q_i^j p_i(A)\right\}_1^M$  и пороги  $R_j$  для них. Оценочная функция  $\Phi(A)$  определяется формулой

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^M Q_j \Pi_j(A),$$

где  $\{Q_j\}_1^M$  — множество весов, а

$$\Pi_j(A) := \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi_j(A) = \sum_{i=1}^M q_i^j p_i(A) \geq R_j, \\ 0, & \text{если } \Phi_j(A) < R_j, \quad j = 1, 2, \dots, M. \end{cases}$$

Способность пороговой логики отображать существенные свойства исследуемых объектов изучались М. Минским и С. Пейпертом [25], причем были выяснены ограничения на характер свойств, структуру логической схемы и количество ее элементов. Однако исследованные ими свойства объектов, которые должны были отображаться при помощи средств пороговой логики весьма далеки от тех свойств позиций, которые должна отражать функция.

В существующих игровых программах применяется несколько иной подход к использованию пороговой логики для вычисления значений оценочной функции  $\Phi(A)$ . Он связан с заимствованным из шахматной теории понятием *типа позиции*. Элементарный признак типа вычисляется по значениям линейной функции

$$\Psi_j(A) := \sum_{i=1}^N \Psi_i^j p_i(A)$$

элементарных признаков позиции  $p_i(A)$  и порога  $R_i$  ( $j = 1, 2, \dots, M-1$ ). Тип позиции определяется логи-

ческими функциями таких признаков. Например, предикаты  $P_k(A)$ , означающие, что позиция  $A$  имеет тип  $k$ , могут быть заданы формулами

$$\begin{aligned} P_1(A) &:= \{\Psi_1(A) \geq R_1\}, \\ P_k(A) &:= \bigwedge_{j=1}^{k-1} \{\Psi_j(A) < R_j\} \& \{\Psi_k(A) \geq R_k\}, \\ &\quad k = 2, \dots, M-1, \\ P_M(A) &:= \bigwedge_{j=1}^{M-1} \{\Psi_j(A) < R_j\} \& \{\Psi_M(A) \geq R\}. \end{aligned}$$

Для каждого типа задается линейная оценочная функция

$$\Phi_j(A) := \sum_{i=1}^N \varphi_i^j P_i(A), \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

причем входящие в эти функции с ненулевыми коэффициентами  $\varphi_i^j$  признаки  $p_i(A)$  обычно не те, которые входят с ненулевыми коэффициентами в функции  $\Psi_j(A)$ , определяющие тип. Таким образом, значение оценочной функции для любой позиции  $A$  равно выражению

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^M \Phi_j(A) P_j(A).$$

Другой путь усложнения оценочной функции — оставаясь в рамках линейной формулы, использовать не только заранее данные, элементарные признаки, но и их логические функции. Любую функцию определенных выше элементарных предикатов  $P_i(A)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) можно выразить таким образом. Действительно, пусть  $\Phi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N}$  — значения рассматриваемой функции для аргументов  $p_i(A) = \varepsilon_i$ , где все значения  $\varepsilon_i$  — нули или единицы, тогда

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \sum_{\varepsilon_2=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_N=0}^1 \Phi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_N} \{p_1(A) = \\ &= \varepsilon_1\} \& \dots \& \{p_N(A) = \varepsilon_N\}. \end{aligned}$$

В таком представлении количество слагаемых слишком велико (оно равно  $2^N$ ), а хорошо вычислимы только достаточно короткие формулы. В практически используемых оценочных функциях обычно имеются «неэлементарные» слагаемые, но их немного.

Итак, в действующих игровых программах оценочные функции либо линейно зависят от достаточно просто определяемых признаков позиции, либо являются суперпозициями линейных и логических функций. При построении модельной игры нужно решить вопросы, какие признаки учитывать и с какими весами. Шеннон предлагал взять набор элементарных признаков из теории данной игры. Действительно, например, в теориях шахмат, шашек, бриджа и т. д. рассматривается ряд таких признаков, монотонно влияющих на исход игры. Однако почти все они не имеют точных формальных определений (исключением являются признаки соотношения материала). Приходится конструировать формальные признаки, лишь приблизительно совпадающие с одноименными содержательными. Важно отметить также, что удалось найти существенные признаки, не известные теориям конкретных игр. Вместе с тем не для всех содержательных признаков удалось найти алгоритмически вычисляемые эквиваленты (даже приблизительные).

Вопросу о весах признаков было посвящено много статей. В основном разрабатывались две концепции. Согласно первой в каждой позиции имеется один доминирующий признак, и веса нужно подбирать так, чтобы наличие любого положительного признака могло быть подавлено лишь отсутствием более важного признака, а не комбинацией нескольких менее важных. Если любая логическая функция элементарных признаков может рассматриваться как новый признак, влияющий на значение оценочной функции, то эта концепция становится бессодержательной. Когда же трудоемкость вычисления оценочной функции ограничена, и, значит, число слагаемых в линейной формуле не слишком велико, такой концепции, рассматриваемой в чистом виде, противоречат уже практически обоснованные способы определения соотношения материала (цены фигур в шахматах или бридже). Попытки применять ее хотя бы только для позиционных признаков не принесли успеха (сильная игра программы Самуэля [33] для игры в американские шашки, по-видимому, не связана с тем, что при определении весов признаков использовалась эта концепция).

Другая концепция — подойти к определению весов признаков эмпирически: ввести их как параметры программы, а затем, разыгрывая различные партии,

подбирать такие значения, при которых игра программы сильнее. Предлагалось также автоматизировать процесс подбора весов так, чтобы они изменялись даже в ходе одной партии. Программы, реализующие автоматический подбор весов, иногда называют *обучающимися*, но правомерность этого названия является спорной. Авторы производили статистические исследования влияния разных значений весов на силу игры шахматной программы. Оказалось, что случайные вариации весов в широких границах вокруг значений, установленных первоначально из некоторых шахматных соображений, почти не влияют на силу игры (разумеется, речь идет о весах позиционных признаков). Однако когда веса выбираются так, что некоторые позиционные признаки практически не влияют на оценку, качество игры существенно ухудшается. Важно также, чтобы никакой позиционный признак не доминировал над группой, состоящей из значительного количества остальных.

В некоторых работах (например, [12]) изучались вопросы автоматического выбора логических функций элементарных признаков, из которых строится оценочная функция. Производится перебор логических формул, проверка корреляции их значений с заданными экспертными оценками тестовых позиций и отбор наиболее информативных функций. Работу такой программы можно назвать обучением с большим правом, чем изменение весов признаков по заданной программе. В этом обучении важную роль играет *учитель* — эксперт, задающий набор тестовых позиций и их оценки. В исследованиях по распознаванию образов аналогичные методы привели к определенным достижениям (см. [6]). Однако обучение программы распознаванию оценок позиций игры пока не дало существенных результатов.

Первые действующие шахматные программы буквально реализовали идеи Шеннона и играли очень слабо. Глубина перебора была сравнительно небольшой, тем более, что многие технические вопросы программирования были решены далеко не лучшим образом, и не использовался метод отсечений ( $\alpha$ ,  $\beta$ -эвристика). Наиболее резко бросающимся в глаза недостатком программ было прекращение перебора на заданной глубине и независимо от характера позиций. Так, например, размен мог быть прерван в произвольный момент, когда материальное

соотношение сил на доске не отражает истинного. Недостатки первых моделей устранялись различными способами. О некоторых из них будет сказано в следующем параграфе. Достаточно сильно играющей шахматной программы создать пока не удалось, но в более простые игры программы играют гораздо сильнее. Так, довольно простая по идеям программа игры в русские шашки [36—38] играет в силу 2-го разряда, а программа Самуэля для игры в американские шашки, о которой говорилось выше, по уровню игры не уступает профессиональным игрокам. Имеются также программы, безошибочно решающие задачи на мат в небольшое число ходов или играющие простые эндшпили, такие, как король с пешкой против короля.

## § 2. О порядке перебора позиций дерева игры

Рассмотрим сначала алгоритмы обхода позиций дерева игры с отсечениями ( $\alpha$ ,  $\beta$ -эвристику). Как показано в главе 1, минимальное количество позиций дерева игры  $\mathfrak{M}$ , которые нужно рассмотреть для определения оценки начальной позиции  $A_0$  и лучшего хода из нее, имеет порядок  $m^k$ , где  $m$  — среднее число ходов в изучаемых позициях, а  $k$  — средняя глубина дерева  $\mathfrak{M}$ . Для достижения минимума необходимо, чтобы в позициях критической ветки  $W$  в первую очередь исследовался лучший ход, а в позициях, не допустимых для противника, — какой-либо из закрывающих. Если же в каждой позиции ходы будут исследоваться в порядке возрастания качества, т. е. каждый следующий будет лучше предыдущего, то придется произвести практически полный обход и исследовать  $O(m^k)$  позиций. Поэтому важно определить порядок обхода позиций, по возможности близкий к оптимальному.

Однако, чтобы гарантировать оптимальность порядка обхода, во многих позициях дерева игры  $\mathfrak{M}$  нужно знать, какой ход из этих позиций является лучшим, т. е. уметь решать для них ту же задачу, решение которой нам нужно только для начальной позиции  $A_0$ , для чего и производится обход. Значит, нас интересует случай, когда такую задачу решать не умеем и можем лишь более или менее часто угадывать нужные нам лучшие или закрывающие ходы. При этом сам процесс обхода

можно рассматривать как проверку правильности нашего угадывания. Способы такого угадывания можно сформулировать как уточнения правила углубления при обходе с отсечениями, определяющие, как выбрать очередной ход, соответствующий шагу вперед.

Так как конструируемый порядок обхода не предполагается гарантированно оптимальным, ошибки в нем допустимы. Поэтому полезно выяснить, как зависит число позиций обхода от ошибок разного характера, и каких ошибок прежде всего следует стремиться избежать, хотя бы и ценой возрастания числа ошибок других типов. В § 3 главы 1 качество порядка обхода описывалось тремя параметрами:  $\gamma$  — средним числом улучшающих ходов в позициях, оценка которых определяется (кандидатах в критическую ветку),  $\delta$  — средним числом улучшающих ходов в позициях, из которых в дальнейшем находятся закрывающие ходы (недопустимых для противника), и  $\epsilon$  — среднего числа плохих ходов в тех же позициях.

Для совершенно равномерной игры  $\mathfrak{A}_{m,n}$  глубины  $n$  с  $m$  ходами в каждой незаключительной позиции, когда в каждой позиции количества улучшающих и плохих ходов равны соответствующим типу позиции средним значениям, число заключительных позиций в дереве обхода определяется формулой

$$\Omega_{m,n} = \Omega^{(1)} t_1^n + \Omega^{(2)} t_2^n + \Omega^{(3)} t_3^n,$$

где  $t_1, t_2, t_3, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$  и  $\Omega^{(3)}$  определяются параметрами  $\gamma, \delta, \epsilon$  и  $m$ . Таким образом, характер роста числа этих позиций в зависимости от глубины дерева  $m$  определяется максимальным из чисел  $t_1, t_2$  и  $t_3$ , являющихся корнями кубического уравнения

$$t^3 - (\gamma + \epsilon) t^2 - (m(1 + \delta) - \gamma(\delta + \epsilon)) t + \gamma m = 0.$$

Если  $\gamma, \delta$  и  $\epsilon$  много меньше  $m$ , то корни  $t_1, t_2$  и  $t_3$  можно выразить через параметр  $q$ , близкий к 1:

$$t_1 = \frac{\gamma}{1 + q\delta},$$

$$t_{2,3} = \pm \sqrt{m(1 + q\delta) + \frac{\left(\frac{q\gamma\delta}{1 + q\delta} + \epsilon\right)^2}{4}} + \frac{\frac{q\gamma\delta}{1 + q\delta} + \epsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$0 < \gamma_1 \leq \gamma,$$

$$|t_2| = \sqrt{m(1+q\delta)} + O(\gamma + \varepsilon),$$

$$|t_3| = \sqrt{m(1+q\delta)} - O(\gamma + \varepsilon).$$

С увеличением  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  число рассматриваемых позиций растет, но влияют эти параметры на скорость роста по-разному. В значение  $t_2$ , определяющее порядок роста числа заключительных позиций в зависимости от глубины  $n$  дерева  $\mathfrak{A}_{m,n}$ , параметры  $\gamma$  и  $\varepsilon$ , грубо говоря, делают аддитивные слагаемые, а  $\delta$  определяет множитель  $\sqrt{1+q\delta}$  (значения  $\Omega_{m,n}$  при различных  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\varepsilon$  приведены в табл. 2).

Рассмотрим теперь, как влияют на число позиций в дереве обхода  $\mathfrak{A}$  индивидуальные ошибки при определении порядка. Пусть  $A$  — очередная позиция ранга  $l < n$ , не допустимая для противника. Если вместо закрывающего хода  $(A, B)$  сначала будет выбран улучшающий ход  $(A, B')$ , то в дерево  $\mathfrak{A}$  дополнительно включится  $B'$ -поддерево, определяющее оценку позиции  $B'$ . Оно эквивалентно дереву обхода игры  $\mathfrak{A}_{m, n-l-1}$  и, как показано в том же § 3 гл. I, при отсутствии других ошибок содержит

$$\begin{aligned} \frac{V\bar{m}^{n-l-2}}{2} ((V\bar{m} + 1)^2 + (-1)^{n-l} (V\bar{m} - 1)^2) - 1 = \\ = m^{\lfloor \frac{n-l}{2} \rfloor} + m^{\lfloor \frac{n-l-1}{2} \rfloor} - 1 \end{aligned}$$

заключительных позиций. Если вместо хода  $(A, B)$  сначала будет рассмотрен плохой ход  $(A, B'')$ , то при отсутствии других ошибок нужно дополнительно рассмотреть минимальное  $b$ - или  $c$ -поддерево, ограничивающее оценку позиции  $B''$  с одной стороны. Оно содержит

$$\frac{V\bar{m}^{n-l-2}}{2} ((V\bar{m} + 1) + (-1)^{n-l} (V\bar{m} - 1)) = m^{\lfloor (n-l-1)/2 \rfloor}$$

заключительных позиций, т. е. меньшее количество.

Количество позиций в дереве обхода в зависимости от числа ходов из незаключительных позиций и порядка просмотра ходов

## Обозначения

- $m$  — число ходов из незаключительных позиций,  
 $n$  — глубина дерева обхода,  
 $\gamma$  — среднее число улучшающих ходов из позиций — кандидатов в критическую ветку,  
 $\delta$  — среднее число улучшающих ходов из позиций, не допустимых для противника,  
 $\varepsilon$  — среднее число плохих ходов из позиций, не допустимых для противника,  
 $A_n$  — количество заключительных позиций в дереве  $\mathcal{A}_n$ , определяющем оценку начальной позиции,  
 $B_n$  — количество заключительных позиций в дереве  $\mathcal{B}_n$ , определяющем, что начальная позиция не допустима для противника,  
 $C_n$  — количество заключительных позиций в дереве  $\mathcal{C}_n$ , определяющем, что начальная позиция не допустима для себя.

$\gamma=1, \quad \delta=0, \quad \varepsilon=0$									
$n$	$m=2$			$m=10$			$m=40$		
	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	2	10	1	10	40	1	40
2	3	2	2	19	10	10	79	40	40
3	5	2	4	109	10	100	1639	40	1600
4	7	4	4	199	100	100	3199	1600	1600
5	11	4	8	1099	100	1000	65599	1600	64000
6	15	8	8	1999	1000	1000	127999	64000	64000
7	23	8	16	10999	1000	10000	2623999	64000	2560000

$\gamma=2, \quad \delta=0, \quad \varepsilon=0$									
$n$	$m=2$			$m=10$			$m=40$		
	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	2	10	1	10	40	1	40
2	4	2	2	28	10	10	118	40	40
3	8	2	4	136	10	100	1756	40	1600
4	16	4	4	352	100	100	5032	1600	1600
5	32	4	8	1504	100	1000	70864	1600	64000
6	64	8	8	3808	1000	1000	202528	64000	64000
7	128	8	16	15616	1000	10000	2837056	64000	2560000

$$\gamma = 1, \quad \delta = 1, \quad \varepsilon = 0$$

n	m = 2			m = 10			m = 40		
	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	10	2	10	40	2	40
2	4	4	4	28	20	20	118	80	80
3	8	8	8	208	48	200	3238	198	3200
4	16	16	16	640	408	480	10960	6438	7920
5	32	32	32	4312	1120	4080	262042	18880	257520
6	64	64	64	14392	8392	11200	998362	519562	755200
7	128	128	128	89920	25592	83920	21261264	1753562	20782480

$$\gamma = 1, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 1$$

n	m = 2			m = 10			m = 40		
	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	10	2	10	40	2	40
2	4	4	4	28	12	20	118	42	80
3	8	8	8	136	32	120	1756	122	1680
4	16	16	16	424	152	320	6514	1802	4880
5	32	32	32	1792	472	1520	76792	6682	72080
6	64	64	64	6040	1992	4720	337390	78762	267280
7	128	128	128	23968	6712	19920	3409108	346042	3150480

$$m = 10$$

$$\gamma = 1,5 \quad \delta = 0,5$$

n	$\varepsilon = 0,5$			$\varepsilon = 1,0$		
	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>	A <sub>n</sub>	B <sub>n</sub>	C <sub>n</sub>
0	1	1	1	1	1	1
1	10	2	1	10	2	10
2	32	16	20	36	18	25
3	184	44	160	203	61	175
4	650	274	440	820	337	606
5	3304	902	2740	4096	1353	3372
6	12623	4843	9020	17648	6773	13534
7	60100	17753	48430	84046	29132	67734

$\gamma = 1,5 \quad \delta = 1$						
$n$	$\varepsilon = 0,5$			$\varepsilon = 1,0$		
	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
0	1	1	1	1	1	1
1	10	2	10	10	3	10
2	36	21	25	40	23	30
3	235	72	212	256	94	230
4	963	483	719	1179	580	935
5	5554	1924	4834	6697	2694	5798
6	24685	11351	19239	32943	15188	26939
7	133508	49599	113507	178512	75069	151879

$\gamma = 2, \quad \delta = 0,5$						
$n$	$\varepsilon = 0,5$			$\varepsilon = 1,0$		
	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
0	1	1	1	1	1	1
1	10	2	10	10	2	10
2	36	16	20	40	18	25
3	200	46	160	220	62	175
4	768	283	460	940	348	625
5	3800	986	2830	4660	1442	3475
6	15484	5223	9855	20860	7248	14425
7	72750	20208	52228	99700	32102	72475

$\gamma = 2, \quad \delta = 1$						
$n$	$\varepsilon = 0,5$			$\varepsilon = 1,0$		
	$A_n$	$B_n$	$C_n$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
0	1	1	1	1	1	1
1	10	2	10	10	3	10
2	40	21	25	44	23	30
3	250	76	212	272	97	230
4	1105	500	756	1320	599	970
5	6212	2111	5003	7432	2889	5990
6	29316	12271	21114	37976	16311	28890
7	156803	56566	122713	206440	83177	163110

Пусть теперь очередная позиция  $A$  оказалась в результате обхода кандидатом в критическую ветку. После каждого улучшающего хода  $(A, B)$  нужно определить оценку позиции  $B$ , т. е. при отсутствии ошибок при обходе  $B$ -поддерева игры  $\mathfrak{A}_{m, n}$  рассмотреть

$$m^{[(n-1)/2]} + m^{[(n-l-1/2)]} - 1$$

заключительных позиций, а после плохого хода  $(A, B)$  в лучшем случае  $m^{[(m-l-1)/2]}$  таких позиций ( $l$  — ранг позиции  $A$ ). Если плохой ход  $(A, B')$  по ошибке рассматривается перед лучшим, то он может оказаться улучшающим. В этом случае, когда нет других ошибок, придется рассмотреть  $m^{[(n-l)/2]}$  «лишних» заключительных позиций, т. е. тоже меньше, чем при выборе в позиции того же ранга улучшающего хода вместо закрывающего. Кроме того, когда количество ошибок в определении порядка перебора не слишком велико, число кандидатов в критическую ветку гораздо меньше числа позиций, не допустимых для противника, и при одинаковой вероятности ошибок в позициях первого типа будет меньше.

Таким образом, ошибки при определении порядка обхода позиций тем хуже, чем ниже ранги позиций, в которых они случаются. Поэтому для очередных позиций низких рангов имеет смысл производить дополнительную работу по уточнению порядка обхода. В среднем же прежде всего следует стараться быстрее находить закрывающие ходы, даже если при этом увеличивается вероятность выбрать плохие ходы и уменьшается — выбрать лучший. Однако в начальной позиции  $A_0$ , обязательно принадлежащей критической ветке, особенно важно как можно раньше выбрать лучший ход. Если же дерево  $\mathfrak{A}$  рассматриваемой игры сильно отличается от равномерного, то дополнительным требованием является предпочтительность ходов, ведущих в *простые* позиции, — корни поддеревьев меньшей мощности.

Итак, можно сформулировать следующие требования к порядку обхода позиций.

1. В первую очередь следует выбирать ходы, у которых больше шансов оказаться лучшими.
2. В первую очередь следует выбирать ходы, у которых больше шансов оказаться закрывающими, даже если их шансы оказаться плохими также велики.

3. При прочих равных условиях предпочтительнее ходы, ведущие в поддеревья меньшей мощности, например, такие, на которые у противника мало ответов.

4. Определение порядка ходов из позиций больших рангов  $l$ , близких к средней глубине дерева игры  $\mathfrak{N}$ , не должно быть слишком трудоемким.

Первое и второе требования несколько противоречат друг другу (насколько известно авторам книги, при выборе порядка обхода в существующих игровых программах второе требование не учитывается). В начальной позиции  $A_0$  и, возможно, в позициях низких рангов первое требование важнее. Действительно, первый выбранный ход ( $A_0, B$ ) из начальной позиции  $A_0$  окажется улучшающим, даже если он достаточно плох. После того, как удовлетворяющий первому требованию ход был выбран, исследован и принес ожидаемую оценку, следует посмотреть «острые» ходы, которые могут оказаться и закрывающими, и плохими. Если же есть основания считать, что на ветке, ведущей в очередную позицию  $A$  из начальной позиции  $A_0$ , противник уже сделал плохой ход, то, руководствуясь этим требованием, можно вместо закрывающего хода выбрать улучшающий.

Остановимся теперь на вопросах, какие признаки позиций и ходов могут влиять на порядок обхода, и как формулируются правила выбора очередного хода при шаге вперед. Можно использовать признаки из того же набора, который используется для вычисления значений оценочной функции  $f(A)$ . Если отклонения  $f(B_i)$  —  $oc(B_i)$  значений оценочной функции от истинных оценок для позиций  $B_i$ , в которые ведут ходы ( $A, B_i$ ) из очередной позиции  $A$ , являются независимыми случайными величинами с одной и той же функцией распределения, то эти ходы следует рассматривать в порядке убывания (если в позиции  $A$  ход белых) или возрастания (если в ней ход черных) значений  $f(B_i)$ . Действительно, среди любого подмножества таких ходов независимо от того, какие ходы были уже рассмотрены, максимальные вероятности оказаться лучшим и закрывающим имеет ход, ведущий в позицию  $B_i$  с максимальным значением  $f(B_i)$ , когда в позиции  $A$  ход белых, и минимальным, когда в ней ход черных.

Однако предположения, оправдывающие такой порядок перебора, для интересующих нас (и читателя) игр, по-видимому, не выполняются. Особенно сомнительно предположение об одинаковости функций распределения всех случайных величин  $f(B_i) - \text{оц}(B_i)$  (наоборот, есть основания считать, что можно найти легко вычисляемые признаки позиций с большим ожиданием абсолютной величины этой разности). Рассмотренный выше способ определения выбора очередного хода имеет два основных недостатка.

1. Если выбранный одним из первых ход  $\Psi_i = (A, B_i)$  окажется закрывающим, то преобразования позиции  $A$  во все исключаемые из обхода позиции  $B_{i'}$  после ходов  $\Psi_{i'} = (A, B_{i'}) \in \mathfrak{A}$  и вычисления значений  $f(B_{i'})$  являются «лишней» работой.

2. Ход  $(A, B_i)$  с благоприятным для соответствующего цвета значением  $f(B_i)$  имеет значительные шансы оказаться улучшающим вместо закрывающего.

По первой причине нецелесообразно упорядочивать ходы  $\Psi_i (i = 1, 2, \dots, m)$  из позиций  $A$  больших рангов в порядке убывания или возрастания значений  $f(B_i)$  оценочной функции в позициях, куда эти ходы ведут. Вместо этого можно упорядочить эти ходы по значениям экспресс-оценки  $\phi(\Psi_i)$ , для вычисления которой знать позицию  $B_i$  не нужно. Например, в игре «крестики-нолики», целью которой является поставить пять своих «фигур» — крестиков или ноликов — на поля, идущие подряд по вертикали, горизонтали или диагонали на квадратной доске большого размера (измеряемого числом полей на вертикали и горизонтали), ход, после которого возникает *открытая тройка* (три своих фигуры подряд на одной линии, не блокированных фигурой противника) или *полуоткрытая четверка* (четыре фигуры на линии, блокированные только с одной стороны), является *угрозой*, т. е. может привести к выигрышу. Вместе с тем, обладает ли ход таким свойством, можно определить, не производя его. (Такой ход удовлетворяет еще и третьему требованию: в ответ противник должен либо заблокировать рассматриваемую конфигурацию, либо создать более сильную угрозу. Значит, число его ответов, которые нужно рассматривать, меньше, чем в позициях без угроз).

Для упорядочения ходов можно воспользоваться понятием одинаковых ходов в разных позициях, имеющим

смысл для многих игр. Интуитивно ход считается одним и тем же, если перед ним и после него изменившие положения фигуры стоят одинаково независимо от того, каково положение неподвижных фигур. Число таких различных ходов во много раз меньше числа возможных различных позиций. В шахматах около 10 000 различных ходов, в то время как различных позиций не меньше, чем  $10^{60}$ . Некоторым из них, например, вторжению ладьи на не битое противником поле на 7-й или 8-й горизонтали для белых (1-й или 2-й — для черных), взятию фигуры большей ценности, чем бьющая, можно приписать большие веса независимо от позиций, из которых они производятся. Другим — рокировке, стандартным развивающим ходам — приписываются большие веса при наличии легко определяемых признаков исходной позиции (в данном случае таким признаком является расположение многих фигур на первоначальных полях).

Рассмотренные способы определения порядка обхода можно назвать статическими, так как они основаны на изучении хода и позиций до и после него. Однако значительно более важным оказался учет динамических обстоятельств, связанных с самим процессом обхода. В этом процессе можно попутно получить гораздо больше полезной информации, чем при слишком трудоемком анализе хода и позиций до и после него. Правда, она относится к другим позициям. Однако близкие позиции дерева обхода различаются положением немногих фигур, а свойства позиций сравнительно устойчивы относительно таких изменений.

Действительно, значения оценочной функции линейно или почти линейно зависят от признаков, определяемых положением немногих фигур, причем таких признаков много, и каждая фигура влияет на несколько признаков. Однако, во-первых, в близко расположенных на дереве игры  $\mathfrak{N}$  позициях большинство фигур стоит на одних и тех же местах, и эти позиции одновременно обладают или не обладают соответствующими признаками. Во-вторых, в них допустимы по правилам игры многие одинаковые ходы, после которых признаки позиции изменяются сходным образом (признаки, определяемые не позициями, а самим ходом, тем более одинаковы). В-третьих, ряд признаков зависит от положения мед-

леннодвигающихся фигур (в шахматах — пешек и королей), которое, если даже меняется, то немного. Теми же свойствами обладают признаки, которые при упорядочении ходов из позиции играют не ту роль, что в значении оценочной функции, например, определяют вероятную надежность последней.

Из приведенных выше рассуждений следует только то, что информацию о близких позициях можно использовать для выбора первоочередных ходов из данной позиции для сокращения обхода дерева рассматриваемой модельной игры. Однако, так как мы надеемся, что качество позиций и ходов в исходной игре близко к их качеству в ее модели, качество одинаковых ходов в близких позициях относительно устойчиво и для исходной игры. Можно привести и соображения, непосредственно относящиеся к последней, например, то, что материальное соотношение, безусловно важное для оценки позиций, является относительно устойчивым признаком (другие соображения тесно связаны с теориями конкретных игр, и мы о них здесь говорить не будем).

Из приведенных выше соображений следует, что ходы, которые часто были лучшими и закрывающими в близких позициях, имеют много шансов оказаться лучшими или закрывающими и в рассматриваемой позиции, а ходы, которые вели в корни поддеревьев обхода меньшей мощности, вероятно сохраняют это качество. Поэтому в процессе обхода следует набирать статистику о качестве ходов и использовать ее для решения вопроса о том, какой сейчас выбрать очередной ход. Часть программы, занимающаяся такой статистикой и выбором ходов на ее основе, называется *службой лучших ходов* (обычно не производится разделения на лучшие и закрывающие ходы).

Служба лучших ходов может быть основана на полной статистике. Это требует большой памяти — про каждый из примерно 10 000 возможных (в шахматах) ходов нужно хранить всю информацию, которая может быть использована. Главное же затруднение состоит в том, что для каждой очередной позиции нужно найти информацию о допустимых в ней ходах в больших массивах службы или, наоборот, для многих ходов, информация о которых хранится в этих массивах, выяснять, допустимы ли они в данной позиции. Такая работа требует

большого машинного времени и, по крайней мере, для позиций больших рангов нежелательна.

Обычно в массивах службы лучших ходов хранится информация лишь о части ходов, испробованных в процессе обхода. Таким образом производится приближенный учет лучших (и закрывающих) ходов. Одним из способов такого учета является так называемая схема вытеснения. Пусть программа рассчитана на хранение  $l$  лучших ходов каждой стороны. Тогда имеются два массива из  $l$  элементов —  $\Xi_\delta[i]$  и  $\Xi_\alpha[i]$ . Когда в процессе обхода применяется правило углубления, и нужно выбрать очередной ход из позиции  $A$  с ходом белых (черных), мы прежде всего ищем ход  $\Xi_\delta[i]$  ( $\Xi_\alpha[i]$ ) с минимальным номером  $k$ ,  $1 \leq k \leq l$ , допустимый в позиции  $A$  по правилам модельной игры и не исследованный раньше. Если же таких ходов нет, то мы выбираем ранее не исследованные ходы в порядке, определенном статическим способом.

Обновление массивов  $\Xi_\delta[i]$  и  $\Xi_\alpha[i]$  производится во время шагов назад. Пусть такой шаг производится из очередной позиции  $B$  с ходом белых (черных). Если она оказалась не допустимой для противника, то обновление массивов не производится. В противном случае нам известен лучший или закрывающий ход  $H = (B, C)$  белых (черных) из позиций  $C$ . Этот ход может содержаться или не содержаться в соответствующем массиве  $\Xi_\delta[i]$  ( $\Xi_\alpha[i]$ ). В первом случае ход  $H$  «продвигается вверх» в массиве, т. е. если  $H = \Xi_{\delta(\alpha)}[i]$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), то производятся действия:

$$\begin{aligned} R &:= \Xi_{\delta(\alpha)}[i]; \\ \Xi_{\delta(\alpha)}[i-1] &:= \Xi_{\delta(\alpha)}[i]; \\ \Xi_{\delta(\alpha)}[i] &:= R; \end{aligned}$$

$R$  — резервный элемент памяти для выполнения перемены мест элементов массива. Естественно, когда  $H = \Xi_\delta[1]$  ( $\Xi_\alpha[1]$ ), продвигаться вверх некуда.

Если же ход  $H$  — «новый» (он, может быть, и бывал лучшим, но память об этом в машине не сохранилась), то он попадает на  $k$ -е место в соответствующем массиве; элементы последнего от  $k$ -го до  $(l-1)$ -го «сдвигаются вниз», а  $l$ -й элемент забывается:

$$\begin{aligned} \Xi_{\delta(\alpha)}[i] &:= \Xi_{\delta(\alpha)}[i-1] \quad (i = k+1, \dots, l); \\ \Xi_{\delta(\alpha)}[k] &:= H. \end{aligned}$$

Таким образом,  $k$  и  $l$  — параметры схемы вытеснения. При максимальном доверии к массиву  $k=l$ , т. е. новый ход становится на последнее место в массиве, при минимальном доверии  $k=1$ .

Первый вариант основан на предположении, что информация о лучших ходах в массиве чаще всего достоверна, т. е. состоит из не раз оказывавшихся лучшими ходов и притом в позициях, близких к рассматриваемым, а появление *нового* хода часто оказывается «случайным нюансом». Второй вариант основан на допущении, что множество *кандидатов в лучшие ходы* меняется довольно быстро, и появление нового хода чаще всего является сигналом такого изменения. Оба предположения являются крайними, и обычно выбирают  $k$  большим единицы и меньшим  $l$ .

Приведем теперь пример службы лучших ходов более сложной структуры, в которой учитываются (хотя и приблизительно) частота, с которой ходы оказывались закрывающими и лучшими, мощности соответствующих поддеревьев и близость позиций, из которых производились эти ходы к рассматриваемой. При выборе очередного хода, соответствующего шагу вперед из данной позиции  $A$ , для допустимых из нее и еще не исследованных ходов  $H=(A, B)$  вычисляются значения функции приоритетов  $\Psi(H)$ , зависящей от этих параметров и статических признаков, и выбирается ход  $H$  с максимальным приоритетом (способ выбора хода из позиций больших рангов может быть более простым для экономии времени).

Преобразования элементов массивов службы лучших ходов, как и в более простом варианте, производятся во время шагов назад, когда стал известен лучший ход или закрывающий ход  $H=(B, C)$  из очередной позиции  $B$ . Ниже мы опишем такие преобразования элементов массивов для соответствующего цвета. Имеются следующие массивы:

$\Xi[i]$  — ходы, входящие в службу;

$v_b[i]$ ,  $v_r[i]$  — количество учтенных случаев, когда соответствующие ходы были лучшими и закрывающими;

$\gamma_b[i]$ ,  $\gamma_r[i]$  — усредненные и приведенные к стандартной глубине количества позиций в соответствующих поддеревьях обхода;

$\rho_b[i, j]$ ,  $\rho_r[i, j]$  — ближайшие по дереву обхода  $\mathfrak{A}$  учтенные расстояния позиций  $A_j$  ветки  $W(A_0, A_1, \dots, A_h)$ , ведущей из начальной позиции  $A_0$  в очередную позицию  $A_h$ , до позиций, в которых ход  $\Xi[i]$  оказывался лучшим и закрывающим.

Когда производится шаг назад из позиции  $A_h$  и известен лучший (закрывающий) ход  $H = (A_h, B)$ , он отыскивается в массиве  $\Xi[i]$ . Если он оказался новым, то он вытесняет некоторый ход  $\Xi[i]$  и занимает его место, причем определяются начальные значения параметров:

$$\begin{aligned} v_b[i] &:= v_r[i] := \gamma_b[i] := \gamma_r[i] := 0; \\ \rho_b[i, j] &:= \rho_r[i_0, j] = \infty \quad (j = h, h-2, \dots). \end{aligned}$$

Символом  $\infty$  здесь обозначено достаточно большое число, которое не может быть расстоянием между вершинами дерева обхода  $\mathfrak{A}$ . Вытесняемый ход должен быть редко встречающимся и далеко расположенным от позиций  $A_j$ .

В зависимости от того, был ли ход  $H = \Xi[i]$  лучшим или закрывающим, теперь пересчитываются параметры с указателем  $b$  или  $r$ :

$$\gamma_{b(r)}[i] := \frac{\gamma_{b(r)}[i] \times v_{b(r)}[i] + \mu / M_{b(r)}(k)}{v_{b(r)}[i] + 1};$$

$$v_{b(r)}[i] := v_{b(r)}[i] + 1;$$

$$\rho_{b(r)}[i, j] := \min(\rho_{b(r)}[i, j], h - j) \quad (j = 0, 1, \dots, h);$$

$\mu$  — мощность  $B$ -поддерева дерева обхода  $\mathfrak{A}$ , а  $M_{b(r)}(k)$  — средняя мощность такого поддерева в вершине  $k$ -го ранга из кандидатов в критическую ветку ( $M_b(k)$ ) и позиций, не допустимых для противника ( $M_r(k)$ ). Она определяется экспериментально или вычисляется теоретически при тех или иных предположениях о дереве используемой модели  $\mathfrak{A}$  и качестве обхода.

Когда делается шаг вперед в позицию  $A_k$  ранга  $k$  для всех ходов службы  $\Xi[1], \Xi[2], \dots, \Xi[l]$ , нужно определить расстояния  $\rho_b[i, k]$  и  $\rho_r[i, k]$ :

$$\rho_{b(r)}[i, k] := \rho_{b(r)}[i, k-1] + 1.$$

Собственно говоря, эти расстояния вычисляются для ходов обеих служб: для белых и для черных. Но, когда в игре  $\mathfrak{A}$  белые и черные делают ходы по очереди, можно хранить расстояния только между позициями

одинакового цвета. В этом случае вводится фиктивный —1-й ранг, и расстояния при шагах назад и вперед вычисляются по формулам

$$\rho_{b(r)}[i, j] := \min(\rho_{b(r)}[i, j], h - j) \\ (j = h, h - 2, \dots, 0 \text{ или } -1); \\ \rho_{b(r)}[i, k] := \rho_{b(r)}[i, k - 2] + 2 \quad (i = 1, 2, \dots, l).$$

В исследуемых играх встречаются ходы, после которых стандартные лучшие ответы не годятся, а нужны специфические. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что свойство хода  $\Theta$  быть таким специфическим ответом на ход  $H$  также должно быть относительно устойчиво. Поэтому было предложено, кроме службы лучших ходов, иметь службу лучших ответов, куда заносить пары ходов  $(H, \Theta)$ , если лучший или закрывающий ответ на ход  $H$  из какой-либо позиции  $A$  оказался взятым не из службы лучших ходов. Таким образом, статистика лучших ответов гораздо меньше, чем статистика лучших ходов.

В начале работы программы массивы лучших ходов (и ответов) либо были пусты, либо заполнены результатами обхода при выборе предыдущего хода партии (перед началом разыгрывания партии, точнее, после выхода из дебюта, их можно было бы заполнить стандартным содержимым, но этого не делалось). Пока статистика еще мала, эти службы сильно засорены случайными ходами. Служба лучших ходов довольно быстро заполнялась ходами нужного качества. Правильное заполнение службы лучших ответов могло происходить только после этого, так как ранее лучшие и закрывающие ходы не из службы встречались часто и могли быть случайными. Когда же служба лучших ответов начинала работать хорошо, ходы, заносимые в службу лучших ответов, встречались гораздо реже, и исправление последней происходило медленно. Возможно, этим, а также довольно высоким качеством выбора ходов, обеспечиваемым службой лучших ходов, объясняется отсутствие заметного эффекта применения службы лучших ответов.

Перейдем теперь к вопросу о том, какую предварительную работу можно произвести в позициях низ-

ких рангов для уточнения порядка обхода. Можно, например, для них применять более сложные схемы в службе лучших ходов, а для позиций больших рангов ограничиться простой схемой вытеснения, но главное — это возможность применять на низких рангах вспомогательный перебор. Один из способов такого перебора — так называемый *каскад*. Программа использует не одну модель  $\mathfrak{M}'$  исходного дерева игры  $\mathfrak{M}$ , а несколько (обычно две), причем их мощности растут. Обычно это модели одного класса с растущими значениями параметра глубины перебора  $n$ .

Сначала производится обход меньшего дерева игры  $\mathfrak{M}'$ , причем дерево обхода  $\mathfrak{M}'$  со всеми окончательными значениями псевдооценок  $gr(A)$  для позиций  $A \in \mathfrak{M}'$  запоминается. Таким образом, для кандидатов в критическую ветку можно определить, какой ход из них был лучшим, а для позиций, не допустимых для противника, — какой ход был закрывающим. При обходе большего дерева игры  $\mathfrak{M}''$  из позиций  $A \in \mathfrak{M}'$  в первую очередь выбирается такой лучший или закрывающий в игре  $\mathfrak{M}'$  ход. Часто он сохраняет свое качество и в большей модели. Если же приходится рассматривать позицию  $A \notin \mathfrak{M}'$  и имеющую низкий ранг, то применяются описанные выше способы выбора хода. Так как число позиций в дереве обхода растет, по крайней мере, как  $m^{n/2}$ , где  $m$  — среднее число ходов в позициях,  $n$  — средняя глубина, предварительный обход меньшего дерева  $\mathfrak{M}'$  мало влияет на общее время обхода.

Поэтому естественно стараться получить в предварительном обходе больше информации, чем может дать  $\alpha, \beta$ -процедура. В частности, можно найти оценки при переборе на меньшую глубину всех позиций  $B_i$  после ходов  $(A_0, B_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \mu$ , из начальной позиции  $A_0$ . Для этого  $\alpha, \beta$ -процедуру нужно производить только в позициях рангов, больших единицы. Однако, по-видимому, увеличивать дерево обхода и тем самым информацию о позициях низких рангов лучше другим способом. Можно ослабить правило отсечения так, чтобы оно было применимо только в случаях, когда определенная по уже рассмотренным позициям псевдооценка очередной позиции значительно выходит

за допустимые границы:

$$\text{гр}(A_k) \left\{ \begin{array}{ll} \geq \overline{\lim} + \delta = \max_{A_i \in \Pi_b} \text{Гр}(A_i) + \delta, & \text{если в очередной} \\ & \text{позиции } A_k \text{ ход} \\ & \text{белых,} \\ \leq \underline{\lim} - \delta = \min_{A_i \in \Pi_c} \text{Гр}(A_i) - \delta, & \text{если в очередной} \\ & \text{позиции } A_k \text{ ход} \\ & \text{черных,} \end{array} \right.$$

где  $A_k$  — очередная позиция ранга  $k$ ,  $\Pi_b$  и  $\Pi_c$  — множества позиций на ветке  $(A_0, A_1, \dots, A_k)$ , ведущей из начальной позиции  $A_0$  в очередную позицию  $A_k$ , соответственно с очередью хода белых и черных;  $\delta > 0$  выбирается так, чтобы были исследованы достаточно хорошие ходы.

Наконец, из обхода дерева модели  $\mathfrak{M}'$  можно попытаться извлечь информацию для определения следующего приближения к исходной игре — модели  $\mathfrak{M}''$ , но это уже не относится к определению порядка обхода. Заметим лишь, что если встать на такой путь, то, по-видимому, более целесообразно постепенное наращивание модели игры с определением на каждом шагу, какую позицию прибавить к имеющемуся дереву модели.

Во многих играх определяются эквивалентные позиции, которые встречаются в разных местах дерева игры. Например, в играх с фигурами, движущимися по доске, эквивалентны позиции с одним и тем же положением фигур на доске и очередью хода (для шахмат нужно еще знать, не встречалась ли эта позиция раньше, а для некоторых позиций еще, не потеряны ли права короткой или длинной рокировки или можно ли и какую именно взять пешку на проходе). В [11] была исследована игра «одномастка», в которую, правда, играют не люди, а программы (она является упрощенным вариантом таких «человеческих» игр, как преферанс или бридж). Для нее можно дать более сильное определение эквивалентности позиций.

В одномастке имеются  $2s$  фигур, упорядоченных по силе, которые раздаются каким-либо образом поровну двум противникам. Два подряд идущих хода состоят в том, что сначала один, а потом другой противник предъявляют для сравнения две своих фигуры. Тот, чья фигура старше, получает одно очко, и сравнивае-

мые фигуры в игре больше не участвуют. При этом в следующей паре ходов первый принадлежит тому, кто набрал очко (в начальной позиции первый ход принадлежит белым). Цель игры — набрать как можно больше очков. После очередной пары ходов число фигур у каждого противника уменьшается на 1. Позицию можно *сжать* — выбросить из последовательности упорядоченных по силе фигур обоих противников те, которые больше не играют. Легко видеть, что позиции с одинаковыми после такого сжатия разбиением фигур на белые и черные и очередью хода эквивалентны.

Для сокращения перебора может оказаться полезным узнать, встречалась ли раньше позиция, эквивалентная очередной, и что известно про ее оценку. Если просто хранить все уже рассмотренные позиции и информацию об их оценках в виде одного массива или с сохранением структуры дерева, то найти эквивалентную позицию в среднем не быстрее, чем рассмотреть поддерево обхода с корнем в данной позиции. Разработаны специальные структуры справочных, позволяющие быстро найти данный элемент без перебора большого количества элементов справочной. В данном случае справочная должна быть, как говорят, *текущей*. Ее состав меняется во время процесса использования. Разработка эффективных структур текущих справочных были посвящены многие работы (см., например, [3, 17, 24]).

При исследовании игр с большим, но обозримым количеством различных неэквивалентных позиций эффективен их перебор не «вниз» от начальной позиции, а «вверх» от заключительных. Так были исследованы шахматные эндшпили с 5-ю фигурами: король, ферзь и пешка против короля и ферзя, и король, ладья и пешка против короля и ладьи (см. [4, 21]). Количества различных неэквивалентных позиций этих эндшпилей и тех, которые могут из них получиться после превращений пешки и взятий фигур, превышает миллиард, но при обходе соответствующих поддеревьев игры приходится рассматривать гораздо большее количество вершин.

Будем для простоты считать, что в рассматриваемой игре белые и черные ходят по очереди, и имеется только два исхода, например, выигрыш сильнейшей

стороны и невозможность последнего. Как в задачах и этюдах, сильнейшую сторону в дальнейшем мы будем называть белыми. Выигранные за них позиции можно разбить на ранги. Пусть множества  $R[i]$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) состоят из позиций, выигранных в  $i$  ходов. Множество  $R[0]$  можно образовать за один просмотр всех позиций с ходом черных, проверяя, являются ли они заключительными и с какой оценкой (на самом деле в  $R[0]$  включают все позиции, в которых можно без перебора или со сравнительно небольшим перебором доказать выигрыш белых, например те позиции, в которых пешка уже превратилась в ферзя или ладью, черным нет пата, и они не могут безнаказанно взять какую-либо белую фигуру или объявить шах).

Основной аппарат исследования — выполнение *ходов назад* в позиции, из которых по правилам игры можно сделать ход в данную. Пусть уже построены множества  $R[0], R[1], \dots, R[k]$  позиций рангов, меньших или равных  $k$ , и  $M[i]$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — множества еще не ранжированных позиций соответствующего цвета:

$$M[2i] = M_{\alpha} \setminus \bigcup_{j=0}^i R[2j],$$

$$M[2i+1] = M_{\beta} \setminus \bigcup_{j=0}^i R[2j+1] \quad (i = 1, 2, \dots, \lceil k/2 \rceil),$$

где  $M_{\beta}$  и  $M_{\alpha}$  — множества всех не эквивалентных между собой позиций с очередью хода соответствующего цвета. Будем обозначать  $U'$  множество позиций, которые можно получить из позиций множества  $U$  при помощи ходов назад, т. е. тех, из которых можно сделать допустимый ход нашей игры и попасть в одну из позиций множества  $U$ .

Из любой позиции множества  $R[2i+1]$  можно сделать ход в позицию множества  $R[2i]$ , и любая позиция, из которой можно сделать такой ход, выиграна не более, чем за  $2i+1$  ход. Следовательно,

$$\begin{aligned} R[2i+1] &:= R'[2i] \setminus \left( \bigcup_{j=0}^{i-1} R[2j+1] \right) := \\ &= R'[2i] \cap M[2i-1]. \end{aligned}$$

Таким же образом доказывается, что множество  $R[2i+2]$  состоит из позиций множества  $M[2i]$ , из которых все ходы ведут в позиции меньших рангов, причем хотя бы один из них — в позицию ранга  $2i+1$ . Значит, ему принадлежат те и только те позиции множества  $M[2i]$ , в которых нельзя сделать хода назад из позиций множества  $M[2i+1]$ :

$$R[2i+2] := M[2i] \setminus M'[2i+1];$$

кроме того,

$$M[i+1] := M[i-1] \setminus R[i+1] \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Итак, последовательно строятся множества  $R[i]$  и  $M[i]$ . Так как множества  $R[i]$  для разных  $i$  не пересекаются, и количество всех позиций конечно, для некоторого  $i$  окажется, что множество  $R[i]$  пусто, а  $M[i] = M[i-2]$ . Тогда в позициях множеств  $M[i]$  и  $M[i-1]$  выигрыша белых нет. Реализация описанного алгоритма исследования игры имеет специфические трудности, связанные с тем, что множества  $R[i]$  и  $M[i]$  не помещаются целиком в оперативной памяти. Однако методы решения соответствующих вопросов не относятся к теме этой книги.

### § 3. Построение моделей игры

Пусть даны два дерева игры  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{A}'$ , причем каждому ходу  $(A'_0, B')$  из начальной позиции  $A'_0$  игры  $\mathfrak{A}'$  поставлен в соответствие некоторый ход  $(A_0, B)$  из начальной позиции  $A_0$  игры  $\mathfrak{A}$ . Тогда выбрать ход в позиции  $A_0$  можно следующим способом: найти лучший ход  $(A'_0, B')$  из начальной позиции  $A'_0$  игры  $\mathfrak{A}'$  и взять соответствующий ему ход  $(A_0, B)$  игры  $\mathfrak{A}$ . Такой способ выбора хода позволяет обойти меньше позиций, когда мощность дерева  $\mathfrak{A}'$  значительно меньше мощности дерева  $\mathfrak{A}$ , и имеет смысл, если есть основания надеяться, что лучшему ходу игры  $\mathfrak{A}'$  должен соответствовать хороший ход игры  $\mathfrak{A}$ .

Мы рассмотрим некоторые приемы построения дерева игры  $\mathfrak{A}'$  по данному дереву игры  $\mathfrak{A}$ , позволяющие учитывать первое требование и в некоторой степени второе пожелание. Начиная с корня  $A_0$  дерева  $\mathfrak{A}$ , в де-

рево игры  $\mathfrak{M}'$  последовательно добавляют ходы игры  $\mathfrak{M}$  из уже попавших в  $\mathfrak{M}'$  позиций и позиции, куда они ведут. Очередь хода в новой попавшей в  $\mathfrak{M}'$  позиции или ее оценка, если эта позиция в исходной игре является заключительной, считаются такими же, как в последней. Когда ни один ход  $(A, B) \in \mathfrak{M}$  из незаключительной позиции  $A \in \mathfrak{M}'$  не включается в дерево игры  $\mathfrak{M}'$ , определенным образом вычисляется оценка позиции  $A$ , не обязательно равная оценке в исходной игре.

Кроме того, в некоторых позициях  $A \in \mathfrak{M}'$  соответствующей стороне предоставляется выбор — сделать один из разрешенных в игре  $\mathfrak{M}'$  ходов  $(A, B) \in \mathfrak{M}$  или удовлетвориться оценкой, обычно вычисляемой так же, как и оценки незаключительных позиций игры  $\mathfrak{M}$ , объявленных в игре  $\mathfrak{M}'$  заключительными. Возможность оценить в позиции  $A \in \mathfrak{M}$  мы будем считать *пустым* ходом  $(A, A') \in \mathfrak{M}'$ . Таким образом, пустые ходы ведут в заключительные позиции дерева игры  $\mathfrak{M}'$ , не принадлежащие дереву игры  $\mathfrak{M}$ , и из каждой позиции  $A \in \mathfrak{M}'$  можно сделать не более одного пустого хода. Так как каждому ходу  $(A_0, B) \in \mathfrak{M}'$  должен соответствовать некоторый ход исходной игры  $\mathfrak{M}$ , в начальной позиции  $A_0 \in \mathfrak{M}'$  нельзя сделать пустого хода.

Построенное описанным выше способом дерево игры  $\mathfrak{M}'$  мы будем называть *моделью дерева игры  $\mathfrak{M}$* . Процесс его построения можно совместить с обходом. На каждом шаге такого обхода, кроме действий, описанных в первой главе, могут производиться следующие действия моделирования:

- 1) определение, какие ходы  $(A, B) \in \mathfrak{M}$  из очередной позиции  $A$  допустимы в игре  $\mathfrak{M}'$ ;
- 2) выяснение, допустим ли пустой ход  $(A, A')$ ;
- 3) вычисление оценки позиции  $A$ , если она не является заключительной в игре  $\mathfrak{M}$ , но является такой в игре  $\mathfrak{M}'$ ;
- 4) вычисление оценки позиции  $A' \notin \mathfrak{M}$ , возникшей после пустого хода  $(A, A') \in \mathfrak{M}'$ .

Вопросами вычисления оценок мы здесь заниматься не будем. Кое-что о них было сказано в § 1 этой главы. Заметим лишь, что для вычисления оценки позиции  $A'$ , возникающей после пустого хода  $(A, A') \in \mathfrak{M}'$ , используются признаки соответствующей позиции  $A \in \mathfrak{M}$ .

Модель  $\mathfrak{M}'$  дерева игры  $\mathfrak{M}$  называется *эквивалентной*, если выполняются следующие условия:

для каждой незаключительной позиции  $A \in \mathfrak{M}'$  лучший непустой ход  $(A, B)$  игры  $\mathfrak{M}'$  является также лучшим в игре  $\mathfrak{M}$ ;

когда пустой ход  $(A, A')$  игры  $\mathfrak{M}'$  является лучшим, в позиции  $A$  игры  $\mathfrak{M}$  можно сделать ход  $(A, B)$ , ведущий в позицию  $B \notin \mathfrak{M}'$  и лучший.

Для любого дерева игры  $\mathfrak{M}$ , содержащего более двух позиций, можно построить меньшую эквивалентную модель. Пусть  $\mathfrak{M}'$  — произвольное поддереву дерева  $\mathfrak{M}$  с корнем в начальной позиции  $A_0$ , содержащее вершину  $B$  первого ранга, где  $(A_0, B)$  — лучший ход игры  $\mathfrak{M}$ . Его можно считать деревом игры с оценками заключительных позиций, равными их оценкам в дереве игры  $\mathfrak{M}$ , причем оно эквивалентно последней. Однако, чтобы пользоваться такой моделью, нужно каким-то образом определить оценки ее заключительных позиций.

Можно привести некоторые примеры, когда это можно сделать, не рассматривая слишком большого числа «лишних» позиций исходной игры  $\mathfrak{M}$ . В эндшпиле: король, слон и пешка против короля и слона, — можно не рассматривать вариантов, в которых слабейшая сторона пожертвовала слона за пешку. Действительно, не существует позиций эндшпиля: король и слон против одинокого короля, — где был бы мат одной из сторон, и, значит, все позиции такого эндшпиля ничейны. В дальнейшем будет рассмотрен некоторый более общий способ построения эквивалентных моделей. Однако любой такой способ, как было показано в главе I, должен быть основан на каких-либо свойствах правил изучаемой игры.

В игровых программах чаще пользуются моделями, эквивалентность которых исходной игре не доказана или даже не имеет места, т. е. эвристическими. Обоснования их разумности обычно являются приближительными рассуждениями. В дальнейшем мы покажем как для некоторых из таких моделей можно вычислить вероятность правильного выбора лучшего хода в позициях исходной игры  $\mathfrak{M}$  или определения оценок последних, если определенную информацию о них можно получить без обхода соответствующих поддеревьев игры

И. Здесь же мы опишем эти модели и свойства изучаемых игр, позволяющие их применять.

Прежде всего мы остановимся на, так сказать, *формальных* методах построения модели, позволяющих минимальным образом использовать анализ рассматриваемых позиций и ходов. Можно, например, просто заранее ограничить количества ходов игры И, допустимых в позициях конструируемой игры И'. В простейшем случае ограничения зависят только от рангов позиций. задается целочисленная функция  $\varphi(k)$  целого аргумента  $k$ , обычно монотонно убывающая и равная 0 при некотором значении  $k=n$ . Все ходы  $(A, B_i)$  из позиции  $A \in \mathcal{M}'$  с ходом белых (черных) упорядочиваются в порядке убывания (возрастания) значений некоторой функции  $f_{\text{пор}}(B_i)$ , и допустимыми в игре И' считаются ходы  $(A, B_i)$  с номерами  $i \leq \varphi(k)$ , где  $k$  — ранг позиции  $A$ , и только они.

Часто в качестве упорядочивающей функции  $f_{\text{пор}}(B)$  берут функцию  $f_{\text{оц}}(B)$ , определяющую значения оценок заключительных позиций игры И'. Однако на самом деле требования к этим функциям несколько различны. Функцию  $f_{\text{оц}}(A)$  нужно определить так, чтобы она была по возможности близкой к истинной оценке позиций  $\text{оц}(A)$  в исходной игре И. Значения  $f_{\text{пор}}(A)$  должны быть такими, чтобы номера лучших ходов  $(A, B_i)$  из позиций  $A \in \mathcal{M}'$  с большой вероятностью оказывались меньше заданных ограничений. Как было отмечено в § 2, для этого малые номера должны быть не только у ходов, ведущих в позиции с экстремальными значениями оценочной функции  $f_{\text{оц}}(B_i)$  (большими, когда в позиции ход белых, маленькими, когда в ней ход черных), но и у ведущих в позиции с большим ожиданием отклонения  $|\text{оц}(B_i) - f_{\text{оц}}(B_i)|$ .

Пусть И'' — модель Шеннона глубины  $n$  той же игры И с теми же значениями оценочной функции  $f_{\text{оц}}(A)$  для заключительных позиций. Тогда, если еще  $\varphi(n)=0$ , построенное по нашим правилам дерево игры И' является моделью дерева игры И''. Если  $\varphi(n-1) > 0$  и в каждой незаключительной позиции  $A \in \mathcal{M}'$  хотя бы один лучший в игре И'' ход  $(A, B)$  допустим в игре И', то И' — эквивалентная модель дерева игры И'', и оценки всех позиций  $A \in \mathcal{M}'$  в обеих играх одинаковы. Когда лучшие ходы игры И'' необязательно допустимы в игре

$\mathfrak{U}'$ , можно поставить вопрос об оценке вероятностей определения правильных оценок и правильного выбора лучшего хода при использовании модели  $\mathfrak{U}'$  рассматриваемого типа.

Такую оценку можно произвести для рассмотренной выше равномерной игры  $\mathfrak{U}_{m, n, s}$  с деревом глубины  $n$ , ходами белых и черных по очереди,  $m$  ходами из каждой позиции  $A$  ранга  $k < n$ ,  $s$  выигрывающими ходами из позиций, в которых выигрыш возможен, и оценками  $f_{\text{оц}}(A)$  заключительных позиций (все они имеют ранг  $n$ ), равными 0 или 1, если предположить, что вероятности ходов  $(A, B) \in \mathfrak{U}_{m, n, s}$  оказаться допустимыми в модели независимы между собой, а для выигрывающих ходов  $(A, B)$  они зависят только от ранга  $k$  позиций  $A$ , из которых они производятся:

$$P\left((A, B) \in \mathfrak{U}' \mid \text{оц}(A) = \text{оц}(B)\right) = \begin{cases} 1, & \text{если в позиции} \\ & \text{ход белых} \\ 0, & \text{если в позиции} \\ & \text{ход черных} \end{cases} = \\ = p_k \quad (0 \leq k \leq n).$$

Пусть  $p_k$  и  $q_k$  — вероятности получить правильную оценку позиции ранга  $k$ , если из нее соответственно можно или нельзя сделать выигрывающий ход. Заключительные позиции оцениваются правильно, т. е.  $p_n = q_n = 1$ . Все ходы из проигранной позиции  $A$  ведут в позиции с ходом противника, выигранные последним. Чтобы была правильна оценка позиции  $A$ , должны быть верны оценки позиций, в которые ведут из нее допустимые в игре  $\mathfrak{U}'$  ходы. Так как соответствующие поддеревья дерева игры  $\mathfrak{U}'$  не пересекаются, вероятности этого независимы, и справедливо рекуррентное соотношение

$$q_k = p_{k+1}^{\varphi(k)}, \quad 0 \leq k < n.$$

Если среди допустимых ходов из выигранной позиции  $A$   $t$  выигрывающих и  $\varphi(k) - t$  проигрывающих, то, чтобы ее оценка была вычислена ошибочно, позиции после выигрывающих ходов должны быть оценены неправильно, а после проигрывающих — правильно. Вероятность этого равна  $(1 - q_{k+1})^t p_{k+1}^{\varphi(k) - t}$ , где  $k$  — ранг позиции  $A$ . Вероятность же рассматриваемого

случая равна  $C_s^t \pi_k^t (1 - \pi_k)^{s-t}$ . Следовательно, полная вероятность ошибки  $1 - p_k$  равна

$$\sum_{t=0}^{\min(s, \varphi(k) - s)} C_s^t \pi_k^t (1 - \pi_k)^{s-t} (1 - q_{k+1})^t p_{k+1}^{\varphi(k) - t}$$

и при  $s \leq \varphi(k) - s$

$$p_k = 1 - (\pi_k (1 - q_{k+1}) + (1 - \pi_k) p_{k+1})^s p_{k+1}^{\varphi(k) - s} \\ (0 \leq k < n).$$

В табл. 3 приведены значения  $p_k$  и  $1 - q_k$  при одинаковых ограничениях  $\varphi(k)$  для всех незаключительных позиций, т. е. при  $\varphi(0) = \varphi(1) = \dots = \varphi(n-1) = \varphi$  и разных  $k, s$  и  $\varphi$ . Из нее видно, что, кроме случаев, когда  $\pi_k$  почти равны 1, имеют смысл только модели с небольшой глубиной  $n$ . Значит, если исследуемая игра похожа на равномерную, а вероятности ходов быть допустимыми приблизительно независимы, то увеличивать глубину перебора за счет равномерного ограничения числа допустимых ходов не следует. В действительности, когда в некоторой позиции  $A$  лучший ход  $(A, B)$  не попадает в число допустимых, в близких позициях лучшие ходы недопустимы с большей вероятностью. От этого вероятности ошибочных оценок только увеличиваются, и неудивительно, что программы с моделями описанного типа играют слабо.

Ограничения  $\varphi(A)$  для количества допустимых в модели  $\mathfrak{M}'$  ходов могли бы зависеть не только от рангов соответствующих позиций  $A$ . Однако такие модели пока не исследовались теоретически и не применялись в практике игрового программирования. Мы здесь рассмотрим более простой случай, когда:

а) во всех незаключительных позициях  $A$  игры  $\mathfrak{M}$  очередь хода принадлежит белым, ходы из них упорядочены, причем вероятности  $P(l)$  того, что лучшим окажется ход  $(A, B_l) \in \mathfrak{M}$  с номером  $l$ , одинаковы и независимы между собой;

б) заключительными являются все позиции ранга  $n$  и только они.

Таким образом, требуется найти критическую ветку  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ , ведущую из начальной позиции  $A_0$  в заключительную позицию  $A_n$  с максимальным значением оценки  $o(A_n)$ .

Вероятности совпадения оценок, когда рассматриваются  
не все ходы

## Обозначения

$m$  — количество ходов из незаключительных позиций, принадлежащих модели,

$s$  — количество выигрывающих ходов из выигранных незаключительных позиций,

$n$  — глубина равномерной игры,

$\pi$  — вероятность для выигрывающих ходов иметь номер  $v \leq m$ ,

$P_n$  — вероятность выигрыша в модельной игре для выигранных в исходной игре позиций,

$Q_n$  — вероятность выигрыша в модельной игре для проигранных в исходной игре позиций.

$n$	$s = 2, m = 3, \pi = 0,8$		$s = 2, m = 5, \pi = 0,8$		$s = 2, m = 3, \pi = 0,9$	
	$P_n$	$Q_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n$	$Q_n$
0	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
1	0,9600	0,0000	0,9600	0,0000	0,9900	0,0000
2	0,9646	0,1153	0,9674	0,1846	0,9903	0,0297
3	0,9216	0,1025	0,8946	0,1528	0,9843	0,0288
4	0,9347	0,2173	0,9350	0,1270	0,9848	0,0463
5	0,8783	0,1835	0,7716	0,2852	0,9807	0,0450
6	0,9087	0,3224	0,9328	0,7265	0,9812	0,0569
7	0,8244	0,2497	0,5215	0,2937	0,9781	0,0554
8	0,8904	0,4397	0,9837	0,9614	0,9786	0,0642
9	0,7500	0,2942	0,1120	0,0790	0,9763	0,0627
10	0,8889	0,5781	0,99999	0,99998	0,9768	0,0694

$n$	$s = 2, m = 5, \pi = 0,9$		$s = 2, m = 5, \pi = 0,95$		$s = 2, m = 5, \pi = 0,99$	
	$P_n$	$Q_n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n$	$Q_n$
0	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,00000
1	0,9900	0,0000	0,9975	0,0000	0,9999	0,00000
2	0,9905	0,0490	0,9975	0,0124	0,9999	0,00050
3	0,9801	0,0466	0,9962	0,0123	0,9999	0,00050
4	0,9815	0,0957	0,9963	0,0187	0,9999	0,00055
5	0,9679	0,0889	0,9955	0,0185	0,9999	0,00055
6	0,9717	0,1506	0,9955	0,0224	0,9999	0,00056
7	0,9503	0,1339	0,9950	0,0222	0,9999	0,00056
8	0,9601	0,2249	0,9951	0,0247	0,9999	0,00056
9	0,9212	0,1841	0,9947	0,0245	0,9999	0,00056
10	0,9480	0,3366	0,9948	0,0261	0,9999	0,00056

Каждую позицию  $A_k$  ранга  $k = 1, 2, \dots, n$  можно определить  $k$  координатами  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — номерами ходов ветки  $(A_0, A_1, \dots, A_k)$ , ведущей в нее из начальной позиции  $A_0$ . В наших предположениях эта ветка является началом критической с вероятностью  $P(x_1) \times \dots \times P(x_n)$ . Так как количество позиций в дереве игры  $\mathfrak{A}'$  ограничено, прежде всего следует рассматривать заключительные позиции, для которых вероятности оказаться оптимальными больше. Следовательно, дерево игры  $\mathfrak{A}'$  нужно составить из веток, ведущих в заключительные позиции с координатами, удовлетворяющими условию

$$P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \dots \cdot P(x_n) \geq L,$$

где  $L$  — подходящим образом выбранная константа.

Часто можно считать, что для интересующих нас значений  $x$  функция  $P(x)$  близка к линейной, а последняя — к экспоненциальной, т. е.

$$P(x) \approx q - rx \approx qe^{-\frac{r}{q}x}.$$

Тогда дерево игры  $\mathfrak{A}'$  содержит заключительные позиции с координатами, для которых

$$P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \dots \cdot P(x_n) \approx q^n e^{-\frac{r}{q}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} \leq L,$$

т. е.  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \ln \frac{L}{q^n} = C$ .

Если еще нумерацию ходов из незаключительных позиций  $A \in \mathfrak{A}'$  начинать с 0, то условием включения позиций  $A_k$  рангов  $k = 1, 2, \dots, n$  в  $\mathfrak{A}'$  является неравенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq C,$$

и можно подбирать сразу константу  $C$ , не определяя  $r$ ,  $q$  и  $L$ .

Когда ограничивают количество допустимых ходов в модели игры  $\mathfrak{A}$  двух противников, выбор лучшего хода может быть ошибочным не только потому, что этот ход оказался недопустимым в модели  $\mathfrak{A}'$ . Плохой ход может быть принят за лучший, если оказались недопустимыми закрывающие ответы на него. Так как у хода  $(A, B_i)$  с большим номером  $i$  велики шансы

оказаться плохим, следует, по возможности, продолжить поиск закрывающего ответа, когда им не оказался один из первых. По аналогии с предыдущим для модели  $\mathfrak{N}'$  игры  $\mathfrak{N}$  с ходами белых и черных по очереди можно предложить условие включения позиций  $A_k$  рангов  $k=1, 2, \dots, n$  в виде неравенства

$$\Phi(A_k) = x_k - \Phi(\Phi(A_{k-1})) \leq C,$$

где  $(A_{k-1}, A_k)$  — ход игры  $\mathfrak{N}$ , ведущий в позицию  $A_k$ , а  $\Phi(x)$  — монотонно возрастающая функция  $x$ . Однако сформулировать вероятностную гипотезу, оправдывающую это условие, пока не удалось.

Перейдем теперь к «семантическим» моделям, в которых допустимость ходов  $(A, B) \in \mathfrak{N}$  определяется на основе качественного анализа их или соответствующих им позиций  $A$  и  $B$ . Для многих игр имеет смысл понятие неустойчивой позиции. Если  $A$  — такая позиция, то довольно велика вероятность значительного отклонения величины  $f(A)$  оценочной функции от истинной оценки  $oc(A)$ . Кроме того, количество ходов  $(A, B) \in \mathfrak{N}$  из нее сравнительно невелико или большинство их ведет в плохие позиции. Вместе с тем выяснить, является ли данная позиция неустойчивой, можно при помощи анализа просто вычисляемых признаков позиции, ведущего в нее хода или ходов из нее, допустимых по правилам игры  $\mathfrak{N}$ .

Например, открытыми и полуоткрытыми  $m$ -камями в позициях игры «крестики-нолики» называются конфигурации, состоящие из  $m$  подряд идущих полей по вертикали, горизонтали или диагонали, занятых одной стороной крестиками или ноликами, по обе или, соответственно, по одну сторону от которых расположены на той же линии  $5-m$  свободных полей. Если у противника есть открытая тройка, то не проигрывают только ходы на соседние с ней поля или создающие угрозу на следующем своем ходу построить пятерку. Таким образом, позиции с открытой тройкой у противника неустойчивы.

Для игр в шашки — русские, американские, международные — неустойчивы позиции, в которых возможно взятие. Действительно, материальная оценка такой позиции после взятия и ответа противника может изме-

ниться непредсказуемым без исследования соответствующих вариантов образом (кроме того, в шашках взятие обязательно и число допустимых ходов в таких позициях значительно меньше, чем в других).

Неустойчивыми можно считать шахматные позиции, возникающие после взятия. Как правило, взятую фигуру можно сразу же отыграть или даже взять больше. Если же отказаться от взятия, то в дальнейшем вернуться к прежнему соотношению материала не удастся. Таким образом, материальная оценка рассматриваемых позиций ненадежна, а число непроигрывающих ходов из них невелико. Однако имеется существенная разница с предыдущими примерами. В тех мало ходов из неустойчивых позиций разрешены правилами игры или не ведут в заведомо проигранные позиции. В последнем же примере низкое качество «тихих» ходов из неустойчивой позиции лишь весьма вероятно.

Ходы, ведущие в неустойчивые позиции, мы будем называть *форсирующими*, а ходы из них, кроме ведущих в заведомо или с большой вероятностью проигранные позиции, — *форсированными*. Как видно из приведенных выше примеров, признаки форсирующих и форсированных ходов также нетрудно вычислить (при программировании игр в крестики-нолики, шашки и шахматы выделяются и другие классы неустойчивых позиций, форсирующих и форсированных ходов, но все они должны определяться легко вычислимыми признаками).

Теперь можно определить понятие *форсированной игры*. Ее позиции являются позициями игры Ж, а допустимыми ходами — форсирующие, форсированные и пустые. Возможность последних связана с тем, что в исследуемых играх почти каждой позиции можно поставить в соответствие позицию с тем же положением фигур, но с очередью хода противоположного цвета. Если такой позиции нет, как например, в шахматах, когда наш король стоит под шахом, то пустой ход считается невозможным. Однако иногда не разрешают пустого хода и в некоторых других позициях, например, если под угрозой материального проигрыша один из противников дал промежуточный шах (в моделях шахматной игры шах часто считается форсирующим ходом), а другой защитился от него, то в случае допу-

стимости пустого хода программа не заметила бы, что угроза проигрыша осталась.

Понятие форсированной игры можно использовать для построения модели следующим образом. Аналогично модели Шеннона задается глубина перебора  $n$ . В позициях  $A_k$  рангов  $k \leq n$  допустимыми считаются все ходы рассматриваемого дерева игры  $\mathfrak{A}$ , но в отличие от модели Шеннона позиции ранга  $n$  не считаются заключительными (если они не заключительны в  $\mathfrak{A}$ ). В них, а также в позициях больших рангов допустимы ходы форсированной игры. Ранги позиций модели  $\mathfrak{A}'$  могут либо совсем не ограничиваться, либо ограничиваться глубиной  $n_1 \gg n$ .

Во многих случаях можно строить модель  $\mathfrak{A}''$ , эквивалентную описанной выше модели  $\mathfrak{A}'$ , но содержащую меньше позиций. Для упрощения описания такой модели мы предположим, что: в исходной игре  $\mathfrak{A}$  белые и черные ходят по очереди; оценочная функция  $f(A)$  состоит из материальной и позиционной компонент

$$f(A) = f_m(A) + f_n(A).$$

Материальная оценочная функция линейна:

$$f_m(A) = \sum_{\mu=1}^M h_\mu P_\mu^\delta(A) - \sum_{\mu=1}^M h_\mu P_\mu^q(A),$$

где  $h_\mu$  — вес  $\mu$ -й фигуры,  $M$  — количество разных фигур, которые могут быть у одного противника,  $P_\mu^{\delta(q)}(A)$  — предикат, равный 1, если в позиции  $A$  фигура белых (черных) стоит на доске, и 0 в противном случае. Значения  $f_n(A)$  позиционной оценочной функции неотрицательны и меньше, чем минимальная положительная разность  $f_m(A') - f_m(A'')$  значений материальной оценки.

Пусть  $A_k$  — очередная позиция при обходе конструируемого дерева игры  $\mathfrak{A}''$  ранга  $k = n - 1$  с ходом белых (черных),  $\overline{\lim}(\overline{\lim})$  — определенная в главе I граница для оценок

$$\overline{\lim} = \max_{A_i \in \Pi_\delta} \text{гр}(A_i),$$

$$\overline{\lim} = \min_{A_i \in \Pi_q} \text{гр}(A_i)$$

(напомним, что  $\Pi_\delta$  и  $\Pi_\epsilon$  — множества позиций ветки  $(A_0, A_1, \dots, A_k)$ , ведущей из начальной позиции  $A_0$  в позицию  $A_k$  очередью хода соответственно белых и черных, а  $\text{гр}(A_i)$  — промежуточные значения параметров позиций этой ветки, вычисляемых при  $\alpha, \beta$ -процедуре вместо их оценок). После хода  $(A_k, A_{k+1}) \in \mathfrak{A}'$  возникнет позиция  $A_{k+1}$  с ходом черных (белых) со значением оценочной функции, равным

$$f(A_{k+1}) = f_m(A_{k+1}) + f_n(A_{k+1}) = f_m(A_k) \overset{+}{(-)} h + f_n(A_{k+1}),$$

где  $h$  — вес взятых на этом ходу фигур или 0, если  $(A_k, A_{k+1})$  — тихий ход. Ранг позиции  $A_{k+1}$  не меньше  $n$ , значит, в ней, как правило, допустим пустой ход.

Значение  $\underline{\lim}(\overline{\lim})$  равно значению оценочной функции  $f(A)$  для некоторой позиции  $A \in \mathfrak{A}$  и может быть представлено в виде суммы материальной и позиционной частей:

$$\begin{aligned} \underline{\lim} &= \underline{\lim}_m + \underline{\lim}_n, \\ (\overline{\lim} &= \overline{\lim}_m + \overline{\lim}_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } f_m(A_{k+1}) = f_m(A_k) + h < \underline{\lim}_m(f_m(A_{k+1})) = \\ = f_m(A_k) - h > \overline{\lim}_m, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \underline{\lim} - f(A_{k+1}) &= \underline{\lim}_m + \underline{\lim}_n - f_m(A_{k+1}) - f_n(A_{k+1}) \geq \\ &\geq \underline{\lim}_m - f_m(A_{k+1}) - f_n(A_{k+1}) > 0, \\ (f(A_{k+1}) - \overline{\lim} &= f_m(A_{k+1}) + f_n(A_{k+1}) - \\ - \overline{\lim}_m - \overline{\lim}_n &\geq f_m(A_{k+1}) - \overline{\lim}_m - \overline{\lim}_n > 0), \end{aligned}$$

так как положительная разность материальных оценок двух позиций больше, чем значение  $f_n(A)$  позиционной оценочной функции для любой позиции  $A$ .

После пустого хода из позиции  $A_{k+1}$  возникает заключительная позиция  $\bar{A}_{k+1}$  описанной ранее игры  $\mathfrak{A}'$  с оценкой

$$\text{оц}_{\mathfrak{A}'}(\bar{A}_{k+1}) = f(A_{k+1}) < \underline{\lim} (> \overline{\lim}).$$

Следовательно, и  $\text{оц}_{\mathfrak{A}'}(A_{k+1}) < \underline{\lim} (> \overline{\lim})$ , т. е. после изучения результата пустого хода из позиции  $A_{k+1}$  будет сделан шаг назад в позицию  $A_k$ , причем значение  $\text{гр}(A_k)$  не изменится, как будто хода  $(A_k, A_{k+1})$

вовсе не было. Значит, в позициях рангов  $k \geq n-1$  с материальной оценкой, лежащей за соответствующей границей  $\underline{\lim}_m$  или  $\overline{\lim}_m$ , можно считать допустимыми лишь взятие фигур с весом  $h > \underline{\lim}_m - f_m(A_k) (f_m(A_k) - \underline{\lim}_m)$  и ходы игры  $\mathcal{H}'$ , после которых пустой ответ запрещен. Определенные таким образом правила построения модели  $\mathcal{H}'$  мы будем называть абсолютной схемой.

Различные ветви модели  $\mathcal{H}''$  могут содержать не одинаковое количество тихих ходов  $(A_k, A_{k+1})$ , не допустимых в форсированной игре. Действительно, некоторые из таких ходов при  $k < n$  могут быть не тихими. Было высказано предположение, что для повышения качества хода  $(A_0, B)$ , выбираемого из начальной позиции  $A_0$ , количества тихих ходов на ветках полезно уравновесить и для достижения этой цели предложены правила построения модели, называемой *тихой игрой*. Имеются два параметра — глубина перебора  $n$  и минимальное число тихих ходов на ветке  $d$ . В позиции  $A_k$  ранга  $k$  допустимы все ходы исходной игры  $\mathcal{H}$ , если  $k < n$  или если число тихих ходов  $(A_i, A_{i+1})$  на ветке  $(A_0, A_1, \dots, A_k)$ , ведущей в нее из начальной позиции  $A_0$ , меньше  $d$ . В противном случае допустимы только ходы форсированной игры.

Программа, играющая в тихую игру, сильнее, чем пользующаяся абсолютной схемой с теми же глубиной перебора  $n$  и оценочной функцией  $f(A)$ . Однако и времени она тратит больше. Вопрос о том, как потратить это дополнительное время более эффективным образом, и можно ли это сделать, пока не имеет ответа.

Близкие соображения, возможно, объясняют относительный успех одной программы, игравшей в русские шашки в силу 2-го разряда на довольно медленно работающей машине (см. [36—38]). В ней тихие ходы из позиции  $A_k$  разрешались, если количества  $\psi(A_i)$  ( $i=0, 1, \dots, k-1$ ) допустимых в исходной игре ходов  $(A_i, A_{i+1})$  из позиций  $A_i$  ветки  $(A_0, A_1, \dots, A_{k-1})$ , ведущей из начальной позиции  $A_0$  в непосредственно предшествующую позицию  $A_{k-1}$ , удовлетворяли неравенству

$$\psi(A_0) \cdot \psi(A_1) \dots \psi(A_n) \leq M,$$

где  $M$  — параметр, от которого зависит время выбора хода из начальной позиции  $A_0$ . В неустойчивых позициях

возможны только взятия, обязательные по правилам игры в шашки, причем число различных способов взятия в позиции гораздо меньше количества тихих ходов, допустимых в других позициях. Следовательно, если на ветке много неустойчивых позиций, то ее длина больше, чем длина «спокойной» ветки, на которой таких позиций мало.

#### § 4. Семантические модели

Окончательная цель участника игры — достичь заключительной позиции с достаточно благоприятной оценкой. Однако во время партии он, как правило, добивается промежуточных целей — достичь позиций, которые ему по тем или иным причинам нравятся. В семантических теориях игр, например, шахматной, даются многие признаки таких позиций и ведущих к ним ходов, однако без точного определения этих признаков. В игровых программах некоторые из этих признаков, которым даются точные определения, обычно сужающие их смысл, определяют значения оценочной функции  $f(A)$ . Поэтому в ходе партии программа в рассматриваемых позициях стремится к достижению тех или иных промежуточных целей.

Однако в процессе обхода рассматриваются многие ходы, явным образом бессмысленные с точки зрения их достижения. Поэтому нет времени на достаточно глубокий просмотр осмысленных вариантов. Кроме того, различные благоприятные признаки позиции не всегда согласуются друг с другом. В результате программа может избрать в партии «средний» путь, чередуя несогласованные между собой ходы. Особенно характерно это для позиций, в которых ни один из противников не угрожает добиться никакой промежуточной цели. В этих случаях при выборе хода программой конкурируют между собой пути, ведущие в позиции с мало отличающимися друг от друга значениями оценочной функции, причем эта разница часто зависит от случайных нюансов. В результате программа «теряет нить» — сама не осуществляет никакого плана и не препятствует планам противника.

Перебор на большую глубину не осуществим без отказа от исследования результатов некоторых ходов

из позиций малых рангов, а запрещение таких ходов на основе чисто количественных оценок не привели к хорошим результатам. Поэтому было предложено объявлять в конструируемой модели ходы заданной игры недопустимыми или, наоборот, допустимыми при помощи семантического анализа этих ходов или возникающих после них позиций. Примером такого анализа является выделение ходов форсированной игры, описанное в предыдущем параграфе.

С точки зрения техники выполнения такого анализа различаются два метода. Первый состоит в том, что исследуется позиция  $A$ , из которой нужно делать ходы, в результате чего генерируются только допустимые ходы, а на остальные время не тратится. При применении второго метода генерируются все ходы  $(A, B)$  из рассматриваемой позиции  $A$  (или по крайней мере, все, кроме явно недопустимых), а затем производится более или менее трудоемкое исследование их на допустимость. Первый метод дает возможность тратить меньше времени, но отбирает ходы только по очень простым формальным признакам. При решении вопроса об использовании второго метода нужно оценить, будет ли на исследование допустимости ходов потрачено меньше времени, чем на обход частей дерева конструируемой модели, исключаемых благодаря такому исследованию.

Важной и легко проверяемой промежуточной целью игры является выигрыш материала. В частности, форсирующие ходы часто представляют собой угрозу выиграть материал. Легко спределяются содержащие такую угрозу некоторые другие ходы, например, нападения на старшие и незащищенные фигуры (такие ходы не включаются в форсированную игру потому, что трудно формально определить достаточно узкий класс форсированных ответов на них). Более широкий класс ходов, создающих угрозу материального выигрыша, определяется при помощи вспомогательных игровых моделей.

При исследовании хода  $(A, B) \in \mathfrak{A}$  рассматриваются модели  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(B)$  и  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(\bar{B})$  с начальными позициями, в которых фигуры на доске стоят так же, как и в позиции  $B$ . В каждой незаключительной позиции этих моделей допустимы ходы форсированной игры и только они. В начальной позиции игры  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(B)$  очередь хода

принадлежит тому же цвету, что и в позиции  $B$ . Поэтому можно считать, что это просто позиция  $B$ . В начальной позиции  $\bar{B}$  игры  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$  очередь хода принадлежит цвету хода  $(A, B)$  (мы предполагаем, что в исходной игре  $\mathfrak{U}$  белые и черные ходят по очереди).

Материальная часть оценки позиции  $\bar{B}$  в игре  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$  сравнивается с материальной частью границы  $\lim_m$  или  $\overline{\lim}_m$ , определенной при обходе основной модели игры  $\mathfrak{U}$ , когда очередной является позиция  $A$ , в зависимости от того, белым или черным принадлежит очередь хода в позиции  $A$ . Если в первом случае эта оценка не меньше  $\lim_m$ , а во втором — не больше  $\overline{\lim}_m$ , то ход  $(A, B)$  называется не проигрывающим по форсированному варианту. Материальная часть оценки позиции  $\bar{B}$  в игре  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$  может сравниваться с другой границей или значением  $f_m(A)$  материальной оценочной функции в позиции  $A$  (для позиций малых рангов естественнее второе решение, для позиций больших рангов — первое). Когда эта оценка достигает соответствующей границы или выходит за нее, ход  $(A, B)$  называется *активным* или *форсирующим второй степени*.

На практике была проверена такая модель, которую называли *схемой активной игры*. В позициях  $A_k$  рангов  $k < n - 1$  допустимыми считались все активные, не проигрывающие по форсированному варианту ходы. Кроме них, допускался один так называемый *лучший пассивный* ход — тот, который среди не проигрывающих по форсированному варианту, но не активных, имеет в игре  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$  (в другом варианте программы — в игре  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$ ) наиболее благоприятную для соответствующего цвета оценку. Если же активных, не проигрывающих по форсированному варианту ходов из позиции  $A$  нет, то допустимыми считались три лучших пассивных хода. Количества допустимых пассивных ходов — 1 и 3 — это значения параметров программы. В позициях  $A_k$  рангов  $k \geq n$ , как и в абсолютной схеме, допустимы были только ходы форсированной игры.

Многие решения были приняты для экономии времени работы программы. Так, проверка ходов  $(A_{n-1}, B)$  из позиций  $A_{n-1}$  ранга  $n - 1$  на активность и безопасность заняла бы не меньше времени, чем обход  $B$ -поддерева, состоящего только из ходов форсированной игры, который

можно было бы не производить, если проверка дает отрицательный ответ (к тому же этот обход совпадает с обходом дерева игры  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$  или отличается от него несколько более широкими начальными границами  $\underline{\text{lim}}$  и  $\overline{\text{lim}}$  для оценки начальной позиции  $B$ ). Поэтому в позициях  $(n-1)$ -го ранга считались допустимыми все ходы рассматриваемой игры  $\mathfrak{U}$ .

Если исследование дерева игры  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$  или  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$  покажет, что ход  $(A, B)$  не обладает требуемыми свойствами, т. е. проигрывает по форсированному варианту или не активен, то обход второго из этих деревьев мог бы понадобиться лишь для того, чтобы выяснить, не относится ли он к числу лучших пассивных ходов. Однако и этого не нужно, если для определения лучших пассивных ходов сравниваются оценки начальных позиций в той из игр  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$ ,  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$ , которая рассматривается в первую очередь. В одном варианте программы сначала производился обход дерева  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$ , в другом —  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$ , причем обход другого дерева производился только при необходимости. Оба варианта играли примерно одинаково.

Если форсированная игра  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{A})$  из позиции  $\bar{A}$  с тем же положением фигур на доске, что и в позиции  $A$ , но с очередью хода противоположного цвета ведет к материальному проигрышу той стороны, которой принадлежит очередь хода в позиции  $A$ , то с большой вероятностью после большинства тихих ходов  $(A, B)$  игра  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$  будет также вести к проигрышу материала. По-видимому, такие ходы раньше следует проверять на безопасность. Тогда многие из них не придется проверять на активность. В противном случае больше таких ходов  $(A, B)$ , которые не проигрывают (это не так, когда в позиции  $A$ , как говорят, цугцванг, но, по крайней мере, в середине партии он бывает редко). В таких позициях ходы следует сначала проверять на активность и только активные и лучшие пассивные — на безопасность.

Правила определения допустимости ходов могут быть смешанными. Например, до некоторого ранга  $n$  могут быть допустимыми все ходы рассматриваемой игры  $\mathfrak{U}$ , от ранга  $n_1$  до  $n_2$  — описанные выше ходы активной игры, а после  $n_2$  — только ходы форсированной игры. В действующих шахматных программах шахи считаются ходами форсированной игры только до некоторого ранга

позиции, или если количество шахов на рассматриваемой ветке меньше заданного эталона. В описанной выше программе активной игры все ходы из начальной позиции  $A_0$  или позиций ранга 1 считаются допустимыми, пока не найден ход, не проигрывающий материала по сравнению с ожидаемой оценкой, полученной в результате ранее произведенного перебора на меньшую глубину.

Программа активной игры была несколько слабее игравшей в абсолютную схему с той же глубиной перебора  $n$ , но тратила значительно меньше времени (сравнение вариантов этих программ, тративших примерно одинаковые количества времени, не проводилось). Эта программа не рассматривала некоторых заслуживавших внимания ходов, но ни один из включаемых в дерево модели ходов не был явно бессмысленным. Однако во многих позициях дерева обхода изучались одинаковые с точки зрения шахматиста варианты, результаты которых для него ясны после того, как эти варианты были рассмотрены один раз.

Типичный пример лишней работы — изучение так называемых *псевдоактивных* ходов. Пусть в форсированной игре  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(A)$  начинающая сторона выигрывает материал, и в модели активной игры после форсирующих ходов из позиции  $A$  этого выигрыша нет. Тогда многие ходы, «не затрагивающие» вариантов форсированной игры, напрасно будут казаться активными, так как после такого хода  $(A, B)$  игра  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(\bar{B})$  окажется, по существу, той же, что и  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(A)$ .

Активные ходы являются примером ходов, отвечающих определенной стратегии, в данном случае стратегии выигрыша материала. Определение такого хода нуждается в уточнении. Можно, как и выше, требовать, чтобы активный ход не проигрывал по форсированному варианту, однако это требование представляется слишком сильным, во всяком случае для ходов из позиции небольших рангов. Вместе с тем вряд ли следует считать активным ход, который ставит фигуру под удар и грозит выиграть материал при помощи взятия этой самой фигурой. Таким образом, нужно сопоставлять между собой ходы из различных позиций деревьев  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(\bar{B})$  и  $\mathfrak{A}_{\text{форс}}(B)$ .

Для уточнения понятия активного хода можно использовать то обстоятельство, что для многих игр

можно определить понятие одного и того же хода из разных позиций. После такого хода во всех позициях, из которых он возможен, положение фигур меняется одинаковым образом. Точное определение одинаковости ходов мы дадим в следующей главе. Здесь же достаточно интуитивного понятия о них. Можно считать неактивным ход  $(A, B)$ , если в игре  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$  противник выигрывает ходом  $(B, D)$ , и в ответ на него выигрывающий в игре  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(\bar{B})$  ход  $(\bar{B}, C)$  невозможен.

Если в некотором варианте один из противников уже выиграл материал, то ему полезно прежде всего пробовать защитные ходы, после которых другая сторона не может добиться материального равновесия. Защитные ходы нужно найти и в случаях, когда исследованные ранее ходы ведут к материальному проигрышу. Одной из проверок защитных качеств хода  $(A, B)$  из позиции  $A$  является определенная выше форсированная игра  $\mathfrak{U}_{\text{форс}}(B)$ . Однако может оказаться, что не проигрывающий по форсированному варианту ход привел к проигрышу в рассматриваемой более богатой ходами модели. Более точное определение условий защитного характера хода требует использования понятий следующей главы, но кое-что можно сказать и сейчас.

Угроза материального проигрыша определяется некоторым деревом игры, например,  $B'$ -поддеревом  $\mathfrak{U}'(B')$  рассматриваемой модели  $\mathfrak{U}'$  исходной игры  $\mathfrak{U}$  с корнем в позиции  $B'$ , куда ведет предыдущий ход  $(A, B')$  из очередной в данный момент обхода позиции  $A$ . Поставим вопрос, какие именно фигуры были проиграны в игре  $\mathfrak{U}'(B')$ . Иногда на него легко ответить, например, в случае, когда противником была взята фигура, стоящая в момент взятия на том же поле, что и в позиции  $A$ , причем мы не могли ответить равноценным взятием. Тогда защитными ходами можно считать уход данной фигуры с этого поля, дополнительную защиту последнего или создание преград на пути фигур противника к нему.

Определение промежуточных целей, отличных от выигрыша материала, более существенным образом зависит от специфики рассматриваемой игры. Ниже приводится пример некоторого класса моделей игры в шахматы, использующий более широкий набор промежуточных целей. Такими целями являются оккупация некоторых полей доски фигурами из данных подмножеств своих

фигур или удары на эти поля. Каждой промежуточной цели соответствует стратегия ее достижения, а последней — ходы, отвечающие данной стратегии. Один и тот же ход может отвечать нескольким стратегиям, а различные стратегии могут быть связаны между собой.

Пусть с каждой шахматной фигурой связана доска ее возможностей — 64 бита, соответствующие полям доски, равные 1 для тех полей, которые находятся под ее ударами и на которые, кроме полей, занятых своими фигурами, она, следовательно, может пойти, и 0 для остальных полей. Пешке соответствуют две доски, на одной отмечено, куда она может пойти, на второй — куда побить. Расположению всех фигур, фигур одного цвета, данного качества и т. д. соответствуют такие же доски. Вопросы создания и хранения таких досок, соответствующих рассматриваемым позициям, относятся к технике игрового программирования и в этой книге нас не интересуют.

Каждой элементарной стратегии рассматриваемого типа соответствует поле доски, которое мы будем называть полем нулевого ранга. Целью той или иной стратегии является встать на поле нулевого ранга некоторой своей фигурой (не любой) или держать это поле под ударом. Полями первого ранга называются те, с которых фигуры держат поле нулевого ранга под ударом и (или для пешки) могут на него пойти. Таким образом, бывают поля первого ранга для короля, ферзя, ладьи, слона, белых и черных пешек. Поля второго ранга для данной фигуры — это те, с которых она бьет хотя бы одно поле первого ранга, не обязательно свое, и т. д.

Общий принцип определения ходов, отвечающих данной элементарной стратегии, состоит в том, что в результате такого хода наша фигура должна перейти на поле более низкого ранга, или ранг поля, на котором стоит не изменившая своего положения фигура, должен уменьшиться, или, наконец, ранг поля, занятого фигурой противника, должен увеличиться. С одной стороны, эти требования приходится ослабить, чтобы включить в число стратегических ходов переносы удара с одного поля данного ранга на другое. С другой стороны, их следует усилить, чтобы исключить «возню на дальних подступах» к полям нулевого ранга и уменьшить общее количество стратегических ходов.

Мы приведем конкретный вариант системы определения ходов, отвечающих стратегиям. Эта система состоит из множества предикатов  $P(A, B)$ , зависящих от позиции  $A$ , из которой производится ход, и позиции  $B$ , в которую он ведет (некоторые из них определяются самим ходом  $(A, B)$ ). Данный ход отвечает стратегии, если хотя бы один из предикатов принимает значение 1 (истина). Чтобы расширить множество отвечающих стратегии ходов, можно добавить к системе один или несколько таких предикатов. Чтобы сузить его, можно исключить предикат или изменить его, потребовав выполнения дополнительных условий. Таким образом, заранее предусматриваются некоторые средства для преобразования системы в ходе ее экспериментальной проверки.

Прежде всего, рассматриваемым стратегиям соответствуют ходы своих фигур на поля нулевого ранга, однако не любые. Например, стратегии слабого пункта отвечает оккупация последнего только легкой фигурой (конем или слоном), стратегии открытой линии — вторжение тяжелой фигуры (ладьи или ферзя) на 7-е или 8-е от себя поле этой линии, стратегии пешечного продвижения — ход пешкой на поле нулевого ранга. Кроме того, элементарным стратегиям отвечают ходы фигур, в результате которых возникают новые нападения на поле нулевого ранга, на фигуры противника, бьющие на нулевой ранг, исчезают нападения противника на поле нулевого ранга или на свои фигуры, бьющие на нулевой ранг.

Эти признаки стратегических ходов легко определяются при помощи несколько избыточной информации о позициях, ходах и стратегиях. Позиция описывается досками  $\Phi_m[\mu]$ ,  $\Phi_e[\mu]$  положений своих и чужих фигур, в которых единице равны биты, соответствующие полям, занятым фигурами с данным названием: для  $\mu = 1$  — пешками,  $\mu = 2$  — конями,  $\mu = 3$  — слонами,  $\mu = 4$  — ладьями,  $\mu = 5$  — ферзем или ферзями, если было превращение пешек,  $\mu = 6$  — королем, а также досками  $M[i]$  ( $i = 1, 2, \dots, q_m$ ) и  $E[i]$  ( $i = 1, 2, \dots, q_e$ ), где единице равны биты полей, находящихся под ударом соответствующей фигуры, своей или чужой ( $q_m$  и  $q_e$  — соответственно количества этих фигур). Мы будем рассматривать позиции до и после хода. Доски, описывающие первую, будут обозначаться соответствующими символами со штрихом, доски второй позиции будут отмечены двумя штрихами.

Ход мы будем описывать набором  $N$  шести битов, соответствующих названиям фигур, из которых 1 равен только бит соответствующей фигуры, а также доской  $G'$ , на которой отмечено поле, откуда пошла фигура, и доской  $G''$ , где отмечено поле, куда она пошла. Таким образом, для хода пешки  $N = (000001)$ , коня  $N = (000010)$  и т. д. Ходу  $Cc1 - g5$ , например, соответствуют  $N = (000100)$  и доски  $G'$ , на которой отмечено поле  $c1$ , и  $G''$ , на которой отмечено поле  $g5$ . Стратегия описывается доской  $R_0$  поля нулевого ранга, досками  $A_m[\mu]$ ,  $A_e[\mu]$ , на которых отмечены поля, откуда в данной позиции это поле бьется соответствующей фигурой, своей или чужой (очевидно,  $A_m[\mu] = A_e[\mu]$  при  $\mu = 2, 3, 4, 5, 6$ , но  $A_m[1] \neq A_e[1]$ ), и набором шести битов  $S$ , где 1 стоят на местах имен фигур, стремящихся занять поле нулевого ранга.

С досками мы будем производить теоретико-множественные операции: в доске  $P \cup Q$  единице равны все биты, равные единице в  $P$  или  $Q$ , в  $P \cap Q$  — биты, равные единице в  $P$  и  $Q$ , в  $P \setminus Q$  — равные единице в  $P$ , но не в  $Q$ . Предикат  $[P]$  является истиной в том и только том случае, когда доска  $P$  не пуста, т. е. хотя бы один ее бит равен единице (аналогично, пустую доску мы будем обозначать  $\emptyset$ ). Аналогичным образом мы будем обозначать действия с наборами из фиксированного количества битов и связанные с ними предикаты.

В этих обозначениях предикат оккупации поля нулевого ранга соответствующей фигурой равен

$$[R_0 \cap G'] \& [N \cap S],$$

предикат наличия новых ударов наших фигур —

$$[(R_0 \cup \bigcup_{\mu=1}^6 A_e''[\mu] \cap \Phi_e''[\mu]) \cap \bigcup_{i=1}^{q_m} (M''[i] \setminus M'[i])],$$

предикат исчезновения старых ударов фигур противника —

$$[(R_0 \cup \bigcup_{\mu=1}^6 A_m''[\mu] \cap \Phi_m''[\mu]) \cap \bigcup_{i=1}^{q_e} (E'[i] \setminus E''[i])],$$

где  $E''[i] = \emptyset$ , если  $i$ -я фигура противника была взята на рассматриваемом ходу.

Элементарные стратегии объединяются в неэлементарные при помощи объединения их полей нулевого ранга. Прежде всего определяются *активные* стратегии, направленные на достижение какой-либо промежуточной цели. Для стратегии центра белых (ее можно называть и стратегией развития) нулевой ранг имеют поля  $e4, e5, e6, d4, d5$  и  $d6$ , для такой же стратегии черных —  $e5, e4, e3, d5, d4$  и  $d3$ , для стратегии атаки на короля противника — поле, на котором он стоит, и поля, которые он бьет. Не элементарна упоминавшаяся выше стратегия открытой линии. По существу, не элементарны и стратегии пешечных продвижений, хотя они и имеют в каждый момент по одному полю нулевого ранга. Каждой активной стратегии соответствует контрстратегия противника с теми же полями нулевого ранга.

Неэлементарным стратегиям и контрстратегиям соответствуют также специфические ходы. Например, стратегии открытой линии отвечают ходы тяжелых фигур на эту линию и их подготовка — новые нападения тяжелых фигур на линию и освобождение поля для тяжелой фигуры (если такое поле занято другой тяжелой фигурой, то последняя должна остаться на линии). Стратегии центра отвечают рокировка и ее подготовка — увод фигуры с линии между королем и ладьей, fianкеттирование слона (ходы  $Cc1-b2, Cf1-g2$  за белых,  $Cc8-b7, Cf8-g7$  за черных) и его подготовка —  $b2-b3$  при слоне на  $c1, g2-g3$  при  $Cf1$  и т. д. Есть специфические ходы и для контрстратегий. Так, защите от атаки на короля отвечает любой ход последнего; при наличии у противника тяжелых фигур этой контрстратегии, а также контрстратегиям открытых линий соответствует создание «форточки». Определения специфических ходов даются при помощи таких же предикатов, как и определения общих. Например, описанные выше специфические ходы для стратегии открытой линии определяются предикатами

$$\begin{aligned}
 & ([L \cap G''] \& \neg [L \cap G']) \& [N \cap S_i], \\
 & \bigvee_{i-\text{тяжелая фигура}} ([L \cap M''[i]] \& \neg [L \cap M'[i]]), \\
 & [L \cap G' \cap \bigcup_{i-\text{тяжелая фигура}} M_h[i]] \& \neg [N \cap S_i], \\
 & [L \cap G''] \& [L \cap G' \cap \bigcup_{i-\text{тяжелая фигура}} M_h[i]] \& [N \cap S_i],
 \end{aligned}$$

где  $L$  — доска рассматриваемой линии,  $S_i = (011000)_i$  — набор шести битов, в котором единицы стоят на местах имен тяжелых фигур — ферзя и ладьи,  $M_h[i]$  — доски «горизонтальных» возможностей тяжелых фигур.

Приведенным выше определениям стратегических ходов, в основном, отвечают ходы, после которых происходят изменения на полях нулевого и первого рангов. Для перевода недалёкобойных фигур (короля и коня) «издалека» к ключевым полям стратегии используется естественная метрика доски: фигура приближается, если сумма абсолютных величин разностей номеров вертикалей и горизонталей поля нулевого ранга и занятого ею уменьшается. Приближение пешек к «театру действий» описывается при помощи стратегий пешечного продвижения. Для перевода дальнебойных фигур (ферзя, ладьи и слона), как и у М. М. Ботвинника (см. [7 — 9]), используется понятие маршрута. Однако такие переводы рассматриваются как отдельные стратегии, некоторым образом связанные со стратегиями, для которых такой перевод производится.

Большинство разрешенных шахматными правилами ходов отвечают какой-либо стратегии. Поэтому для сокращения перебора не все они должны быть разрешены. Должны быть сформулированы правила запрещения стратегий и правила разрешения ранее не допущенных стратегий. Такие правила могут быть основаны на семантическом анализе рассматриваемых позиций и учитывать затраченное программой на ходы играемой партии время (в цейтноте можно совсем не разрешать новых активных стратегий). Одна из целей использования моделей игры со стратегическими ходами — препятствовать бесплановой игре, когда выбор хода зависит от случайных обстоятельств, влияющих на значения оценочной функции в заключительных позициях модели.

Можно было надеяться, что этой цели удовлетворяет следующая система правил. В начальной позиции модели разрешены все стратегии. В  $B$ -поддереве модели после хода  $(A, B)$ , отвечающего активным стратегиям, запрещены наши активные стратегии, которым ход  $(A, B)$  не отвечает, но если этот ход отвечает какой-либо разрешенной контрстратегии, то никакая активная стратегия вновь не запрещается. В  $C$ -поддереве модели после ответа противника  $(B, C)$  запрещаются контрстратегии

к активным стратегиям противника, которым этот ход не отвечал. Если же ход  $(B, C)$  отвечает какой-либо из разрешенных противнику контрстратегий, то запрещение наших контрстратегий не происходит.

Однако оказалось, что почти каждый ход отвечает какой-либо контрстратегии. Действительно, поля низких рангов для контрстратегий расположены большей частью в «своем лагере» доски, и в результате хода своей фигуры часто возникают новые удары на них. Поэтому механизм отсечения ходов действует недостаточно сильно. Можно предложить ограничивать количество контрстратегических ходов на ветке отдельно для белых и черных или разрешить такие ходы только в ответ на ходы противника, отвечающие соответствующим активным стратегиям. Правда, неясно, как быть с контрстратегическими ходами из начальной позиции, но их можно, например, разрешить. Есть и более сложное, «семантическое» решение. Когда в процессе обхода мы попадаем в позицию  $A$  первый раз, разрешаются ходы, отвечающие активным не запрещенным стратегиям и, может быть, небольшое число ходов, контрстратегических относительно активных разрешенных стратегий противника, если они достаточно высоко котируются службой лучших ходов. После хода  $(A, B)$ , отвечающего некоторым активным стратегиям, в позициях  $B$ -поддерева обхода со своим ходом запрещены активные стратегии, которым этот ход не отвечает. Если же исследуется любой контрстратегический ход, то новые запрещения активных стратегий в начале обхода соответствующего поддерева не производятся.

Пусть мы вернулись в позицию  $A$  после исследования хода  $(A, B)$ . Если этот ход оказался закрывающим, то ничего нового делать не нужно, так как сейчас будет сделан шаг назад. Если он плохой, то мы будем исследовать следующий ход из ранее разрешенных. Если же он улучшающий, т. е. приносит частичную оценку позиции  $A$ , заключенную между старыми значениями границ  $\underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$ , то производится изменение множества разрешенных контрстратегий. Сначала оно пусто, допустимость контрстратегических ходов из службы лучших не означает допустимости других ходов, отвечающих тем же контрстратегиям. В рассмат-

риваемом случае имеется критическая ветка из позиции  $A$ , начинающаяся только что исследованным ходом ( $A, B$ ). В дальнейшем разрешаются контрстратегии к активным стратегиям противника, оставшимся разрешенными в конце критической ветки, и запрещаются остальные, если раньше они были разрешены, но если все ходы противника на критической ветке — контрстратегические, то запрещаются все контрстратегии.

Если все разрешенные ходы исследованы и оказались плохими, то существует левое  $\alpha$ - или  $\beta$ -поддерево с корнем  $A$  в зависимости от того, принадлежала ли очередь хода в этой позиции белым или черным. Тогда дополнительно разрешаются контрстратегии к активным стратегиям противника, разрешенным в концах этого поддерева. Однако если на ветке, ведущей в позицию  $A$  из начальной позиции  $A_0$ , уже достаточно много контрстратегических ходов, и в одной из позиций меньшего ранга с нашей очередью хода, расположенной на этой ветке, был найден удовлетворительный ход, то контрстратегии не разрешаются и из позиции  $A$  делается шаг назад.

Трудность реализации такого предложения состоит в том, что к моменту разрешения какой-либо контрстратегии многие ходы ( $A, B$ ) из позиции  $A$  могут быть уже просмотрены и либо отвергнуты, так как они не отвечают допустимым в то время стратегиям, либо разрешены, но с сужением множества допустимых стратегий. Поэтому после изменения множества допустимых контрстратегий их нужно просмотреть еще раз. Те из них, которые отвечают вновь разрешенным контрстратегиям, нужно «пустить в перебор». Однако некоторые из них могли считаться допустимыми и раньше. Если они и тогда считались контрстратегическими, то, конечно, еще раз их исследовать не нужно. Но они могли отвечать некоторым активным стратегиям. В таком случае эти активные стратегии нужно запретить, а допустимые в позиции  $A$  активные стратегии, которым такой ход не удовлетворяет, — разрешить. Все же, по-видимому, избежать некоторого повторения одинаковых вариантов в такой модели не удастся.

С другой стороны, некоторые из рассматриваемых стратегий «зацепляются» друг за друга. Так, продвижение некоторой пешки полезно «подкрепить» движением

соседних пешек (но так, чтобы те не забежали вперед), атаку на короля — соответствующими пешечными продвижениями, стратегию открытой линии — продвижениями соседних пешек, что часто бывает нужно, когда на такой линии стоит еще и пешка противника. Такое зацепление можно осуществить при помощи графа  $\text{Ind}$  индуцирования стратегий. Если дуга  $(S_1, S_2) \in \text{Ind}$ , то допустимость стратегии  $S_1$  влечет за собой допустимость стратегии  $S_2$ . Однако, если стратегия  $S_2$  индуцирована, то отвечающие ей ходы должны считаться также отвечающими индуцировавшей ее стратегии  $S_1$ .

Полезно также ввести превращения стратегий. Например, если стратегия открытой линии привела к вторжению тяжелых фигур, то следует объявить допустимой стратегию атаки на короля, или после установки своей фигуры на поле нулевого ранга, являющемся очередным полем маршрута, следует закрепить данную элементарную стратегию и ввести стратегию достижения следующего пункта маршрута. Условия разрешения новой стратегии могут зависеть и от изменений позиции, прямо не связанных с целями стратегий. Стратегию открытой линии можно разрешать по случаю того, что такая линия открылась, стратегию пешечного продвижения — после того, как соответствующая пешка стала проходной и т. д. Рассмотренные раньше активную и защитную стратегии, связанные с соотношением материала, можно разрешать и запрещать в поддеревах с корнями в позициях, где такое соотношение изменяется.

Некоторая часть описанных выше предложений была реализована. Небольшая практическая проверка показала возможную перспективность семантических моделей рассмотренного нами типа, но основные исследования пока еще впереди.

## ГЛАВА 3

### МЕТОД АНАЛОГИЙ

#### § 1. Одинаковые ходы в разных позициях

Мы уже говорили, что игровые программы часто по много раз «смотрят одно и то же». Человек, посмотрев такое один раз, в дальнейшем делает выводы «по аналогии». Однако часто незначительные на первый взгляд изменения позиций меняют ход игры и приводят к существенно разным результатам. Такие изменения называют существенными по отношению к рассмотренным вариантам. Более или менее хорошо человек определяет, является или не является разница между исследованной и не исследованной позициями существенной, и в зависимости от этого решения рассматривает или не рассматривает варианты из последней. Чтобы создавать программы, работающие таким же образом, нужно произвести анализ понятий аналогичного (в дальнейшем мы будем часто говорить — такого же) хода и существенной для данных вариантов разницы между позициями.

Начнем с понятия аналогичного хода. Во всех играх, которые мы приводим и еще приведем в качестве примеров, фигуры движутся по доске, и ходы являются, так сказать, элементарными передвижениями, описываемыми конечным набором правил, небольшим по сравнению с числом позиций и даже по сравнению с числом различных классов аналогичных между собой ходов. Чтобы такое определение хода было более универсальным, кроме обычных полей доски, можно рассматривать *дополнительное поле*, куда, например, в шахматах и шашках переходят взятые фигуры. Приведенное описа-

ные ходов игры взято из шахмат и шашек, но и, например, в игре «крестики-нолики» есть доска, разбитая на поля, только фигуры не движутся по ней, а на каждом ходу одна фигура с дополнительного поля переходит на какое-либо поле доски. Карточные игры можно описать аналогичным образом, например, в бридже 6 полей —  $N, S, E, W$ , «стол» и дополнительное поле, куда переходят фигуры, выбывшие из дальнейшей игры.

Можно дать стандартное описание правил игры, определяющих допустимые ходы. Позиции игры описываются набором значений отношений инцидентности между элементами конечных множеств:  $T$  — доски (ее элементы называются полями),  $F$  — множества фигур и  $C$  — множества участников игры. Отношение  $f/t$  выражается словами «фигура  $f$  стоит на поле  $t$ », отношение  $f/c$  — словами «фигура  $f$  принадлежит участнику игры  $c$ » (во многих играх отношения  $f/c$  не меняются, т. е. каждая фигура имеет свой «цвет»). Каждая фигура  $f \in F$  в данной позиции стоит на одном поле доски и принадлежит одному из участников игры. Любой допустимый ход — это реализация «виртуального хода» — изменения некоторых отношений инцидентности. «Нижняя ступень» иерархии правил игры описывает набор виртуальных ходов.

Виртуальный ход можно описать, задавая следующие множества отношений инцидентности.

1. Набор отношений  $\{f_i/t'_i, f_i/c'_i\}$ , которые должны выполняться перед ходом и не выполняются после него.

2. Набор отношений  $\{f_i/t''_i, f_i/c''_i\}$ , которые не выполняются перед ходом, но выполняются после него.

3. Набор отношений  $\{f_i/t'''_i, f_i/c'''_i\}$ , которые должны выполняться перед ходом (иначе рассматриваемый виртуальный ход из данной позиции не допустим), и продолжают выполняться после хода.

Часто третий набор отношений определяет условия о том, что некоторое множество полей доски для допустимости виртуального хода должно быть пустым. Множество полей  $c_i$ , соответствующих отношениям инцидентности этого набора, мы объединим в подмножество  $L \subset T$  — «линию хода» (линия не содержит ни одного хода, когда третий набор пустой). В первом приближении виртуальные ходы допустимы из позиций, для которых выполняются отношения инцидентности из

этих трех наборов, а остальные отношения инцидентности произвольны. Реальный ход — это допустимый виртуальный ход. Одно из условий допустимости — соответствующая очередь хода. Другие описываются при помощи понятия виртуальных ходов и некоторых других, т. е. находятся на более высоких ступенях иерархии правил.

По интуиции аналогичны реальные ходы, которым соответствует один и тот же виртуальный ход. Однако в конкретных играх приходится учитывать некоторые обстоятельства «высших» уровней, например, возникает или исчезает в результате выполнения виртуального хода шах королю. В то же время оказывается возможным считать одинаковыми реальные ходы, которым соответствуют разные виртуальные с близкими в некотором смысле линиями. Мы, в основном, будем придерживаться интуитивного определения.

Прежде чем заняться исследованием понятия существенной разницы позиций, остановимся на вопросе о том, в каких ситуациях особенно желательно принимать решения по аналогии. Пусть  $B$  — очередная позиция при обходе. Если ход  $(B, B')$  — лучший, то его последствия желательно выяснить как можно точнее. Если он закрывающий, то этот факт нужно установить, чтобы произвести шаг назад из позиции  $B$ , не рассматривая других ходов  $(B, C)$  (если известно, что из позиции  $B$  можно сделать шаг назад, не рассматривая никаких ходов из нее, то, вероятно, можно было и не делать шага вперед в нее). К тому же, так как лучшие и закрывающие ходы угадываются сравнительно хорошо, большинство попадающих в дерево обхода ходов — плохие. Поэтому для сокращения перебора особенно ценны способы массового отсека плохих ходов, в том числе, использующие аналогию.

Итак, мы рассмотрим следующую схему применения метода аналогий. Пусть в позициях  $B$  и  $C$  с очередью хода одного и того же цвета, например, с ходом белых, можно сделать аналогичные ходы  $(B, B_1)$  и  $(C, C_1)$ . В результате обхода  $B_1$ -поддерева игры  $\mathfrak{A}$  выяснилось, что  $oc(B_1) \leq m$ , причем  $\tilde{\mathfrak{A}}(B)$  — соответствующее поддерево обхода, включающее ход  $(B, B_1)$ . Позиции  $B, C$  и дерево  $\tilde{\mathfrak{A}}(B)$  определяют значение предиката влияния

$\text{Inf}(B, C, \tilde{\mathfrak{M}}(B))$ . Если он равен 1, то разница между позициями  $B$  и  $C$  влияет на дерево обхода  $\tilde{\mathfrak{M}}(B)$ . Тогда последствия хода  $(C, C_1)$  нужно исследовать. В противном случае, т. е. когда  $\text{Inf}(B, C, \tilde{\mathfrak{M}}(B)) = 0$ , влияния нет, и заключение по аналогии о том, что  $\text{оц } C_1 \leq m$ , корректно.

Чтобы определить предикат влияния, для вычисления которого не нужно производить перебор позиций  $C_1$ -поддерева дерева игры  $\mathfrak{M}$ , исследуем ситуации, когда  $\text{оц } C_1 > m$ . В дальнейшем мы для простоты будем считать, что в игре  $\mathfrak{M}$  белые и черные ходят по очереди. Кроме того, мы будем называть позиции с оценками, большими  $m$ , выигранными, позиции с оценками, не большими  $m$  — проигранными, а аналогичные ходы — одними и теми же. Так как позиция  $B_1$  проиграна, и это выяснилось при обходе, существует минимальное по включению  $\alpha$ -усеченное дерево  $\mathfrak{M}_\alpha(B_1)$ , все заключительные позиции которого проиграны. Точно так же существует  $\beta$ -усеченное дерево  $\mathfrak{M}_\beta(C_1)$  с корнем  $C_1$ , выигранными заключительными позициями и одним ходом из каждой незаключительной позиции с ходом белых (правда, в отличие от дерева  $\mathfrak{M}_\alpha(B_1)$  оно нам неизвестно, но пока это не важно).

Дереву  $\mathfrak{M}_\alpha(B_1)$  принадлежит выигрывающий за черных ход  $\Psi_1 = (B_1, B_2)$ , ведущий в позицию  $B_2$  с ходом белых. Предположим, что такой же ход допустим по правилам игры  $\mathfrak{M}$  в позиции  $C_1$ . Он ведет в позицию  $C_2$  также с ходом белых. Так как  $\mathfrak{M}_\beta(C_1)$  —  $\beta$ -усеченное дерево, а  $C_1$  — позиция с ходом черных, ему принадлежат все ходы игры  $\mathfrak{M}$  из позиции  $C_1$ , в том числе ход  $\Psi_1 = (C_1, C_2)$ , а, значит, позиция  $C_2$ . Если последняя не является заключительной, то дереву  $\mathfrak{M}_\beta(C_1)$  принадлежит один ход  $\Psi_2(C_2, C_3)$  из нее. Он ведет в позицию с ходом черных так же, как и такой же ход  $(B_2, B_3)$  из позиции  $B_2 \in \mathfrak{M}_\alpha(B_1)$ , если только последний существует. Как любой ход из позиции дерева  $\mathfrak{M}_\alpha(B_1)$  с ходом белых,  $(B_2, B_3) \in \mathfrak{M}_\alpha(B_1)$  (см. рис. 18).

Такие рассуждения можно повторять дальше и показать, что существуют ветки  $(B, B_1, \dots, B_k)$  и  $(C, C_1, \dots, C_k)$ , начинающиеся соответственно из рассматриваемых позиций  $B$  и  $C$  и содержащие одни и те же ходы  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_k$  в одинаковой последователь-

ности ( $\Psi_0$  — это ход  $(B, B_1)$ , по предположению одинаковый с ходом  $(C, C_1)$ ), причем ветка  $(B, B_1, \dots, B_k)$  принадлежит дереву  $\mathfrak{H}(B)$  (и его поддереву  $\mathfrak{H}_{\Psi_0}(B) = (B, B_1) \cup \mathfrak{H}_u(B_1)$ ). Так как деревья  $\mathfrak{H}_u(B_1)$  и  $\mathfrak{H}_\delta(C_1)$  конечны, процесс построения последовательности ходов

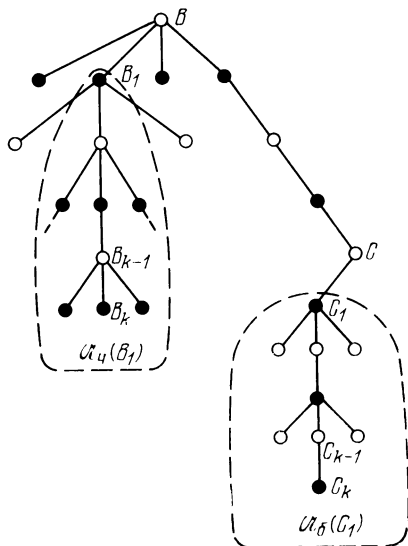


Рис. 18.

$\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}$  должен закончиться. Причиной невозможности его продолжения может быть только одна из следующих ситуаций:

1) ход черных  $\Psi_k = (B_k, B_{k+1})$ , выигрывающий за них в позиции  $B_k \in \mathfrak{H}_u(B_1)$  невозможен из соответствующей позиции;

2) выигрывающий ход белых  $\Psi_k = (C_{k+1}, C_k) \in \mathfrak{H}_\delta(C_1)$  невозможен из позиции  $B_k$ ;

3) позиция  $B_k$  заключительная, а позиция  $C_k$  — нет;

4) позиция  $C_k$  — заключительная, а позиция  $B_k$  — нет;

5) обе позиции  $B_k$  и  $C_k$  — заключительные.

Главный интерес для исследования представляют две первые ситуации, изображенные на рис. 19. Ситуации 3, 4, 5 можно исключить при помощи формального приема. Для игры с двумя исходами (какую мы

рассматриваем, объявив проигранными все позиции с оценками, не большими  $m$ , и выигранными — позиции с оценками, большими  $m$ ) можно построить эквивалентную модель, в которой заключительные позиции всегда проиграны за ту сторону, чья в них очередь хода. Для этого достаточно во всех выигранных за свой цвет заключительных позициях  $F$

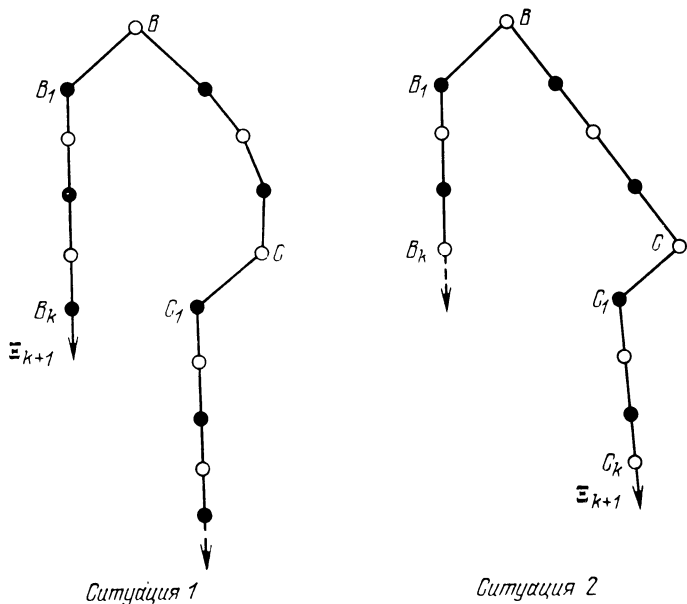


Рис. 19.

считать допустимыми по одному «фиктивному» ходу  $(F, \bar{F})$  в заключительную позицию  $\bar{F}$  с той же оценкой, т. е. проигранную за свой цвет.

Если игра  $\mathcal{M}$  удовлетворяет нашему условию, то при ситуации 3 в позиции  $C_k$  ход белых, и из нее есть выигрывающий ход  $\Psi_{k+1} = (C_k, C_{k+1})$ . Позиция же  $B_k$  заключительная, и никакой ход из нее, в том числе и  $\Psi_{k-1}$ , невозможен. Таким образом, в ситуации 3 имеет место также ситуация 2, и, аналогично, в ситуации 4 — ситуация 1. Ситуация же 5 невозможна, так как при ней в заключительных позициях  $B_k$  и  $C_k$  разные оценки, но

одна и та же очередь хода. Однако такое формальное исключение ситуаций неудобно для исследования, так как фиктивный ход определяется совершенно иначе, чем настоящий, и не поддается исследованию при помощи понятия виртуального хода и рассмотренных выше способов определения последнего.

Особенно важно исключить ситуацию 5. Ситуации 3 и 4 все же можно изучить методами, аналогичными тем, которые ниже будут применяться для изучения ситуаций 1 и 2. В них из позиции  $B_k$  или  $C_k$  допустим какой-либо виртуальный ход, а из другой позиции такой ход не допустим. В случае 5 пришлось бы пользоваться правилами определения оценок заключительных позиций, которые сложнее правил, определяющих виртуальные и реальные ходы. Поэтому мы сейчас рассмотрим более или менее общие примеры правил игры, в результате которых исключается ситуация 5, а отчасти, 3 и 4.

Если выигрыш или проигрыш определяются положением лишь части фигур, и в позициях  $B$  и  $C$  фигуры, участвующие в финальных конфигурациях, определяющих проигрыш белых в заключительных позициях дерева  $\mathcal{U}_n(B_1)$  стоят одинаково, то последовательности ходов, ведущие в последние из позиций  $B_1$ , из позиции  $C_1$  ведут в заключительные позиции с теми же оценками. Например, в игре «волк и овцы» волк выигрывает, если попадает в «лагерь противника» — на 1-ю горизонталь доски, такую же, как и для русских шашек. Значит, для этой игры невозможны ситуации 3 и 5.

Кроме того, выигрывающие заключительные конфигурации обычно возникают только в результате хода выигрывающей стороны. Например, в игре «крестики-нолики» после ее хода возникает такая конфигурация — пять своих фигур подряд по вертикали, горизонтали или диагонали. Можно совсем немного изменить правила этой игры так, чтобы номер хода был однозначно связан с оценками соответствующих заключительных позиций, и ситуации 3, 4 и 5 оказались невозможны. Достаточно после  $(L+1)$ -го хода объявить ничейную любую позицию, если раньше ни одна сторона не добилась выигрыша. В таких играх, как шашки и шахматы, однозначная связь между очередью хода и оценкой соответствующей заключительной позиции нарушается

возможностью ничьей, в основном определяемой отрицательным образом (ни одна сторона не может выиграть).

Другая причина невозможности ситуации 5 во многих играх, естественно, и модельных, заключается в том, что оценки заключительных позиций в них равны сумме материальных выигрышей на каждом ходе последовательности  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ , ведущей из начальной позиции  $A_0$  в заключительную позицию  $F$  —

$$\text{оц}(F) = \sum_{i=1}^k h(\Psi_i).$$

Например, в ряде карточных игр (и похожей на них модельной игре с полной информацией — одномастке) они равны взвешенной сумме взяток — множеств фигур, одновременно уходящих со стола. Веса таких взяток имеют противоположные знаки для взяток, принадлежащих белым и черным (когда играют два противника), а в некоторых играх зависят от входящих в них фигур.

В таких играх, как шахматы и шашки, оценки заключительных позиций непосредственно определяются иначе. Однако, чтобы выиграть в них, очень часто предварительно нужно получить материальный перевес. Поэтому в оценках заключительных позиций моделей этих игр важной составляющей является материальная оценка, о которой мы уже говорили в предыдущей главе:

$$f_m(C) := \sum_{\mu=1}^M h_{\mu}(C) P_{\mu}^{\delta}(C) - \sum_{\mu=1}^M h_{\mu}(C) P_{\mu}^{\eta}(C).$$

Если последовательность ходов  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$  ведет из позиции  $B$  в заключительную позицию  $F$ , то материальная оценка последней равна

$$\begin{aligned} f_m(F) &= f_m(B) + (f_m(F) - f_m(B)) = \\ &= f_m(B) + \sum_{\mu=1}^M (P_{\mu}^{\delta}(F) - P_{\mu}^{\delta}(B)) h_{\mu} - \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^M (P_{\mu}^{\eta}(F) - P_{\mu}^{\eta}(B)) h_{\mu} = f_m(B) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\lceil k/2 \rceil} h(\Psi_{2i+1}) - \sum_{i=1}^{\lceil k/2 \rceil} h(\Psi_{2i}), \end{aligned}$$

где  $h(\Psi)$  — вес хода  $\Psi$ . Он равен сумме весов взятых

фигур противника и разности нового и старого весов своей фигуры, изменившей положение. Последняя разность отлична от 0 для ходов с превращением (в дамку, ферзя и т. д.). Значит, для хода  $\Psi$  без взятия и превращения  $h(\Psi) = 0$ .

Таким образом, когда вариант  $(\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1})$  ведет из позиции  $B$  к материальному проигрышу ( $f_m(B_k) < f_m(B)$ ), он ведет к такому же проигрышу и из позиции  $C$ . Если изменение позиционной оценки не может компенсировать материального проигрыша белых после хода  $\Psi_0 = (B, B_1)$  из позиции  $B$ , и  $f_m(B) = f_m(C)$ , то позиция  $C_k$ , соответствующая заключительной позиции  $B_k \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$ , не может быть не проигранной за белых, т. е. ситуация 5 для рассматриваемых моделей невозможна. Ситуации 3 и 4 для этих моделей исключаются тем, что в них все заключительные позиции, кроме возникающих после так называемых *пустых* ходов, проиграны за свой цвет. Подробнее об этом будет сказано в следующем параграфе.

Итак, для достаточно широкого класса игр невозможность возникновения ситуаций 1 или 2 в парах соответствующих позиций  $B_k \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$  и  $C_k$  из «параллельного» дерева  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(C)$  означает, что  $\text{Inf}(B, C, \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)) = 0$ . Поэтому предикат влияния можно построить на основе исследования условий неодинаковой допустимости одного и того же хода в параллельных позициях. Пусть  $\text{Inf}(B, C, D)$  — предикат, равный 1, когда в позиции  $D \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$  ход черных, и ход  $\Psi = (D, G) \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$  невозможен из параллельной позиции  $E \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(C)$ , или в  $D$  ход белых, и существует виртуальный ход  $\Psi(E, H)$ , возможный из параллельной позиции  $E \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(C)$  и невозможный из позиции  $D$ . Предикат влияния  $\text{Inf}(B, C, \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B))$  легко выразить через такой «локальный» предикат

$$\text{Inf}(B, C, \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)) = \bigvee_{D \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)} \text{Inf}(B, C, D).$$

Так как любая позиция полностью определяется конечным набором признаков, т. е. значениями элементарных предикатов из конечного множества  $\{\pi_\alpha\}$ , предикат  $\text{Inf}(B, C, D)$  можно представить в виде дизъюнктивной нормальной формы с компонентами  $\pi_\alpha(B)$ ,  $\pi_\alpha(C)$  и  $\pi_\alpha(D)$  (можно считать, что множество  $\{\pi_\alpha\}$  вместе

с каждым предикатом содержит и его отрицание). Эту форму можно преобразовать так, чтобы выделить неэлементарные предикаты позиций  $B$ ,  $C$  и  $D$ :

$$\text{Inf}(B, C, D) = \bigvee_{i=1}^s (\rho_i(B) \& \sigma_i(C) \& \tau_i(D)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Inf}(B, C, \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)) &= \bigvee_{D \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)} \left( \bigvee_{i=1}^s (\rho_i(B) \& \sigma_i(C) \& \tau_i(D)) \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^s (\rho_i(B) \& \sigma_i(C)) \& \left( \bigvee_{D \in \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)} \tau_i(D) \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^s (\rho_i(B) \& \sigma_i(C) \& \tau_i(\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B))), \end{aligned}$$

где для любого множества позиций  $\mathfrak{A}$

$$\tau_i(\mathfrak{A}) := \bigvee_{D \in \mathfrak{A}} \tau_i(D), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Предикаты  $\tau_i(\mathfrak{A})$  обладают важным свойством

$$\tau_i(\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2) = \tau_i(\mathfrak{A}_1) \vee \tau_i(\mathfrak{A}_2).$$

Таким образом, предикаты  $\rho_i(B)$ ,  $\sigma_i(C)$  можно определить по позициям  $B$  и  $C$ , а значения предикатов  $\tau_i(\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B))$  вычислить во время обхода дерева  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$ , причем объем информации об этих значениях не зависит от количества позиций в этом дереве. Если предикат  $\text{Inf}(B, C, D)$  *точный*, т. е. определяет необходимые и достаточные условия возникновения ситуаций 1 и 2, то количество предикатов  $s$  может оказаться очень большим, и вычисление предикатов  $\tau_i(\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B))$  потребует много времени и памяти. Однако, как будет показано в дальнейшем, для конкретных игр можно построить довольно легко вычисляемые предикаты, если заменить необходимые и достаточные условия возникновения ситуаций 1 и 2 только необходимыми условиями.

Пусть исследование дерева обхода  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$  показало, что ход  $\Psi_0 = (B, B_1)$  из позиции  $B$  ведет к проигрышу, и после ходов  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{2l}$  мы попали из позиции  $B$  в позицию  $C$  также с ходом белых. Достаточно часто в ней возможны некоторые «новые» ходы  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$ , недопустимые из позиции  $B$ . В этих случаях построенный выше предикат влияния  $\text{Inf}(B, C, \mathfrak{A}_{\Psi_0}(B))$  равен 1,

так как позиция  $C$  в дереве  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(C)$  соответствует позиции  $B$  в дереве  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$  и мы имеем дело с ситуацией 2. Замена деревьев  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$  и  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(C)$  деревьями  $\mathfrak{A}_q(B_1)$  и параллельными ему  $\mathfrak{A}_{q_1}(C_1)$  обычно не помогает, так как, по крайней мере, некоторые новые ходы  $\Omega_\lambda$  остаются допустимыми в позициях дерева  $\mathfrak{A}_{q_1}(C_1)$  (с ходом белых). Таким образом, пользуясь определенным выше понятием влияния, сократить обход  $C$ -поддерева дерева игры  $\mathfrak{A}$  не удастся.

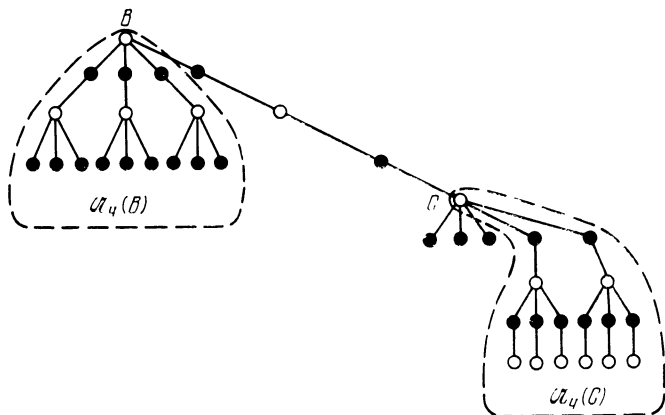


Рис. 20.

Между тем новые ходы  $\Omega_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, r$ ) могут «не иметь отношения к делу» и, следовательно, быстро проигрывать. Здравый смысл говорит, что в таком случае ранее сделанный вывод о ходе  $\Psi_0$ , возможном и в позиции  $C$ , скорее всего должен остаться в силе. Пересмотр его нужен только тогда, когда последовательность ходов  $\Lambda(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{2l})$  или варианты, доказывающие проигрыш белых после ходов  $\Omega_\lambda$  ( $1 \leq \lambda \leq r$ ), влияют на варианты дерева  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$ . Однако это другое понятие влияния. Оно является более узким, так как теперь запрещаются не все ситуации типа 2, а лишь те, при которых становятся возможными ходы белых, отличные от уже рассмотренных. Новый предикат влияния  $\text{Inf}'(B, C, \mathfrak{A}_q(B))$  определяется из условий возможности возникновения в позициях дерева  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(C)$  новых ходов, отличных от  $\Omega_\lambda$ .

Схема сокращения перебора с применением этого понятия влияния изображена на рис. 20. Прежде всего мы исследуем новые ходы  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$ . Пусть  $\mathfrak{A}_{\{\Omega_i\}}(C)$  — соответствующее дерево обхода и  $\mathfrak{A}_{\{\Omega_i\}}(B) = \Lambda \cup \mathfrak{A}_{\{\Omega_i\}}(C)$ . Если дерево  $\mathfrak{A}_{\{\Omega_i\}}(C)$  «не влияет» на

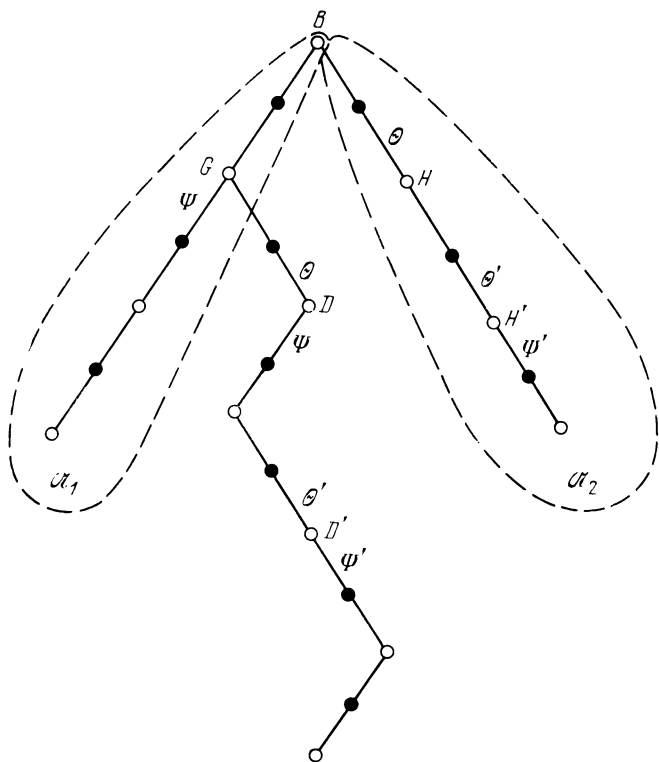


Рис. 21.

дерево  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$ , то ход  $\Psi_0 = (B, B_1) = (C, C_1)$  из позиции  $C$  проигрывает так же, как и из позиции  $B$  (более точное описание такого метода сокращения обхода будет дано в § 4 этой главы). Таким образом, мы должны определить не влияние различия позиций  $B$  и  $C$  на дерево обхода  $\mathfrak{A}_{\Psi_0}(B)$ , а влияние одного поддерева  $\mathfrak{A}_1$  с корнем  $B$  на другое поддерево  $\mathfrak{A}_2$  с корнем в той же вершине. Предикат такого влияния  $\text{Inf}(B, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$  скла-

дывается из предикатов влияния друг на друга веток  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  этих поддеревьев:

$$\text{Inf}(B, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = \bigvee_{\Lambda_1 \in \mathfrak{A}_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{A}_2} (B, \Lambda_1, \Lambda_2).$$

В  $B$ -поддереве игры  $\mathfrak{A}$  имеются «составные» ветки, в которых ходы какой-либо ветки  $\Lambda_1 \subset \mathfrak{A}_1$  перемежаются ходами некоторой ветки  $\Lambda_2 \subset \mathfrak{A}_2$ , причем относительный порядок ходов ветки сохраняется (см. рис. 21). Среди веток  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  только одна может иметь нечетную длину. Иначе количество ходов белых и черных в составной ветке  $\Lambda$  отличалось бы на 2, что невозможно для игры с ходами белых и черных по очереди. Позиции  $D$  ветки  $\Lambda$ , инцидентной ходам  $\Psi \in \Lambda_1$ , и  $\Theta \in \Lambda_2$ , соответствуют позиции  $G \in \mathfrak{A}_1$  и  $H \in \mathfrak{A}_2$ , инцидентные ходам  $\Psi$  и  $\Theta$  на соответствующих ветках  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . Когда оба инцидентных позиции  $D'$  хода принадлежат одной и той же ветке  $\Lambda_1$  или  $\Lambda_2$ , соответствующая  $D'$  позиция  $H'$  есть только в одном из деревьев  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ . Конечной позиции ветки  $\Lambda$  соответствует конечная позиция составляющей ветки  $\Lambda_1$  или  $\Lambda_2$  того же цвета, когда длины этих веток имеют разную четность, и обе конечные позиции, когда  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  имеют четную длину.

В таком более общем случае ситуация 1 означает, что из некоторой позиции  $D$  ветки  $\Lambda$  ( $\text{col } D \neq \text{col } B$ ) недопустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  ход  $\Psi$ , допустимый из соответствующей позиции  $G$ , лежащей на ветке  $\Lambda_1$  или  $\Lambda_2$  и принадлежащий этой ветке; ситуация 2 означает, что из позиции  $D$  ( $\text{col } D = \text{col } B$ ) возможен некоторый ход  $\Omega$ , невозможный ни в одной из соответствующих ей позиций.

## § 2. Аксиомы влияния и некоторые возможности сокращения перебора

Итак, мы будем считать, что определен предикат влияния  $\text{Inf}(B, \Lambda_1, \Lambda_2)$ , зависящий от позиции  $B$  и ведущих из нее веток  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . Его свойства, используемые для доказательства теорем о возможности сокращения обхода, можно задать аксиоматически. Для этого нужно дать несколько определений.

Ветка  $\Lambda(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l)$  называется *составленной из двух веток*  $\Lambda_1(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k)$  и  $\Lambda_2(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{l-k})$ :

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

если каждый ход  $\Psi_h \in \Lambda$  совпадает с одним из ходов  $\Theta_i \in \Lambda_1$  или  $\Omega_j \in \Lambda_2$ , причем соответствие между ходами ветки  $\Lambda$  и ходами веток  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  взаимно однозначно, а порядки соответствующих ходов этих веток согласованы, т. е.

$$\begin{aligned}\Theta_i = \Psi_h \& \Theta_{i+1} = \Psi_g \Rightarrow h < g, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \\ \Omega_j = \Psi_m \& \Omega_{j+1} = \Psi_n \Rightarrow m < n, \quad j = 1, 2, \dots, l-k-1.\end{aligned}$$

Ветка  $\Lambda(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l)$  называется *строго составленной из веток*  $\Lambda_1(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k)$  и  $\Lambda_2(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{l-k})$ :

$$\Lambda = \Lambda_1 * \Lambda_2,$$

если

$$\Psi_i = \begin{cases} \Theta_i, & i = 1, 2, \dots, k, \\ \Omega_{i-k}, & i = k+1, k+2, \dots, l. \end{cases}$$

Таким образом, определена некоммутативная операция строгой композиции, которая, правда, не всегда определяет ветку дерева рассматриваемой игры  $\mathfrak{A}$  с началом в позиции  $B$ , так как некоторый из ходов  $\Psi_i$  в соответствующей позиции, возникшей после последовательности ходов  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{i-1}$ , может оказаться недопустимым по правилам игры  $\mathfrak{A}$  (ясно, что при этом  $i > k$ ). Однако допустимой может быть ветка  $\Lambda = \Lambda_1 * \Lambda_2$ , когда ветка  $\Lambda_2$ , ведущая из позиции  $B$ , состоит из ходов, не обязательно допустимых из соответствующих позиций. Нестрогая композиция  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$  не определена однозначно (ходы веток  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  могут чередоваться по-разному) и также может определить недопустимую ветку. Ее можно считать коммутативной в том смысле, что отношение веток  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$  симметрично относительно 2-го и 3-го аргументов. Строгая композиция ветки  $\Lambda$  и хода  $\Theta$  определяется аналогично строгой композиции двух веток:

$$\Lambda(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l) * \Theta := \Lambda'(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l, \Theta).$$

Пусть фиксирована позиция  $B$  — начало всех рассматриваемых веток. Если  $\text{Inf}(B, \Lambda_1, \Lambda_2) = 1$ , то мы будем говорить, что ветка  $\Lambda_1$  влияет на ветку  $\Lambda_2$ , и введем обозначение  $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$  для этого отношения влияния. Кроме того, мы будем рассматривать отношение  $\Lambda \sim \Psi$  влияния ветки  $\Lambda$  на ход  $\Psi$ . Оно не совпадает с отношением  $\Lambda \sim L(\Psi)$  влияния ветки  $\Lambda$  на ветку  $L(\Psi)$ , состоящую из одного хода  $\Psi$ . Если ход  $\Psi$  воз-

возможен в позиции  $B$ , то из  $\Lambda \sim \Psi$  следует, что  $\Lambda \sim \sim L(\Psi)$ , но не наоборот.

Позицию  $D$ , куда ведет ветка  $\Lambda(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l)$  из позиции  $B$ , мы будем обозначать  $\text{fin}(B, \Lambda)$ . Цвет хода  $\Psi$  мы будем обозначать  $\text{col } \Psi$ , цвет стороны, которой принадлежит очередь хода в позиции  $A$ , —  $\text{col } A$ , цвет стороны, которой принадлежит очередь хода в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$ , —  $\text{col } \Lambda$  (так как в рассматриваемой игре  $\mathfrak{U}$  белые и черные ходят по очереди, последний цвет однозначно определяется значением  $\text{col } B$  и четностью длины ветки  $\Lambda$ ). Когда в позиции  $B$  ход белых,  $\mu \underset{\text{col } B}{\leq} \nu$  означает, что  $\mu \leq \nu$ , а  $\mu \underset{\text{col } B}{\geq} \nu$  — то, что  $\mu + \delta \leq \nu$ , где  $\delta$  не-

которая заранее определенная величина; когда же в ней ход черных, те же обозначения будут применяться для неравенств  $\mu \geq \nu$  и  $\mu - \delta \geq \nu$  соответственно. Если  $\text{oc}(D) \underset{\text{col } B}{\geq} \text{oc}(E)$ , то мы будем говорить, что оценка позиции  $D$  значительно хуже для  $\text{col } B$ , чем оценка позиции  $E$ .

Множество виртуальных ходов, допустимых по правилам игры  $\mathfrak{U}$  в некоторой позиции  $A$ , мы будем обозначать  $M(A)$ .

**Аксиомы влияния.** В приводимых ниже формулировках предполагается, что в игре  $\mathfrak{U}$  белые и черные ходят по очереди, все рассматриваемые ветки начинаются в фиксированной (впрочем, произвольно) позиции  $B$  и состоят из ходов, допустимых по правилам игры  $\mathfrak{U}$  из соответствующих позиций.

1. Аксиома о связи влияний на ход и на ветку. Если ветка  $\Lambda_1$  влияет на ход  $\Psi$  цвета  $\text{col } B$  и  $\Psi$  принадлежит ветке  $\Lambda_2$ , то  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_2$ :

$$\Lambda_1 \sim \Psi \ \& \ \text{col } \Psi = \text{col } B \ \& \ \Psi \in \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_2.$$

2. Аксиома о симметрии. Если ветка  $\Lambda_1$  влияет на ветку  $\Lambda_2$ , то и  $\Lambda_2$  влияет на  $\Lambda_1$ :

$$\Lambda_1 \sim \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda_2 \sim \Lambda_1.$$

3. Первая аксиома о композиции веток. Если ветка  $\Lambda$  составлена из веток  $\Lambda_1, \Lambda_2$  и влияет на ход  $\Psi$ , то  $\Lambda_1$  влияет на  $\Psi$  или  $\Lambda_2$  влияет на  $\Psi$  или, наконец,  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_2$ :

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ \& \ \Lambda \sim \Psi \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Psi \vee \Lambda_2 \sim \Psi \vee \Lambda_1 \sim \Lambda_2.$$

4. Вторая аксиома о композиции веток. Если ветка  $\Lambda$  составлена из веток  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  и влияет на ветку  $\Lambda_3$ , то  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_3$  или  $\Lambda_2$  влияет на  $\Lambda_3$  или  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_2$ :

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ \& \ \Lambda \sim \Lambda_3 \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_3 \vee \Lambda_2 \sim \Lambda_3 \vee \Lambda_1 \sim \Lambda_2.$$

5. Аксиома о ситуации 1. Пусть  $\Lambda_1$  — ветка четной длины,  $\Lambda_2$  — нечетной,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , ход  $\Psi$  допустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_2)$  и не

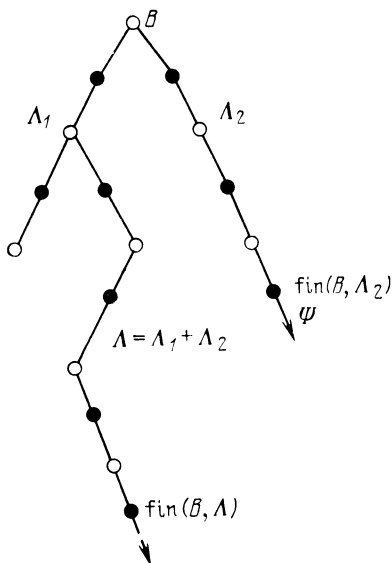


Рис. 22.

допустим из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$  (см. рис. 22). Тогда ветка  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_2 * \Psi$ :

$$\begin{aligned} \text{col } \Lambda_1 &= \text{col } B \ \& \ \text{col } \Lambda_2 \neq \text{col } B \ \& \ \Lambda = \\ &= \Lambda_1 + \Lambda_2 \ \& \ \Psi \in M(\text{fin}(B, \Lambda_2)) \ \& \ \Psi \notin \\ &\quad \notin M(\text{fin}(B, \Lambda)) \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_2 * \Psi. \end{aligned}$$

6. Первая аксиома о ситуации 2. Пусть  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — ветки четной длины,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , ход  $\Psi$  недопустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  из позиций  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  и

$\text{fin}(B, \Lambda_2)$ , но допустим из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$  (см. рис. 23). Тогда  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_2$ :

$$\text{col } \Lambda_1 = \text{col } \Lambda_2 = \text{col } B \ \& \ \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ \& \ \Psi \notin$$

$$\notin (M(\text{fin}(B, \Lambda_1)) \cup M(\text{fin}(B, \Lambda_2))) \ \& \ \Psi \in$$

$$\in M(\text{fin}(B, \Lambda)) \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_2.$$

7. Вторая аксиома о ситуации 2. Пусть  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — ветки четной длины,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , ход  $\Psi$  допустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  из позиций  $B$ ,  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  и

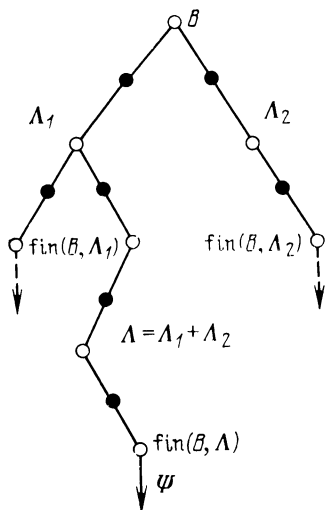


Рис. 23.

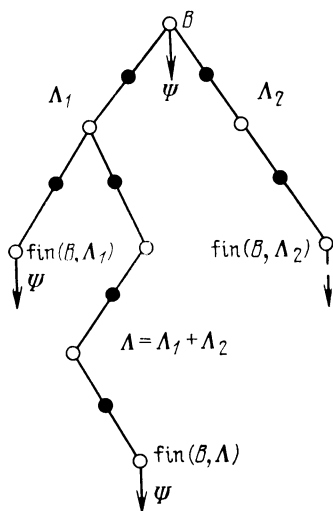


Рис. 24.

$\text{fin}(B, \Lambda)$ , но не допустим из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_2)$  (см. рис. 24). Тогда  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_2$  или на  $\Psi$ :

$$\text{col } \Lambda_1 = \text{col } \Lambda_2 = \text{col } B \ \& \ \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ \& \ \Psi \in$$

$$\in (M(B) \cap M(\text{fin}(B, \Lambda_1)) \cap M(\text{fin}(B, \Lambda))) \ \& \ \Psi \notin$$

$$\notin M(\text{fin}(B, \Lambda_2)) \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_2 \vee \Lambda_1 \sim \Psi.$$

8. Аксиома о ситуациях 3 и 4. Пусть  $\Lambda_1$  — ветка четной длины,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , одна и только одна из позиций  $\text{fin}(B, \Lambda)$  или  $\text{fin}(B, \Lambda_2)$  является заключительной (см. рис. 25). Тогда  $\Lambda_1$  влияет на  $\Lambda_2$ :

$$\text{col } \Lambda_1 = \text{col } B \ \& \ \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ \& \ ((M(\text{fin}(B, \Lambda)) =$$

$$= \emptyset \ \& \ M(\text{fin}(B, \Lambda_2)) \neq \emptyset) \vee$$

$$\vee (M(\text{fin}(B, \Lambda)) \neq \emptyset \ \& \ M(\text{fin}(B, \Lambda_2)) = \emptyset) \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_2.$$

9. Аксиома о ситуации 5. Пусть  $\Lambda_1$  — ветка четной длины,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , обе позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$  и  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  — заключительные (см. рис. 26). Тогда  $\Lambda_1$

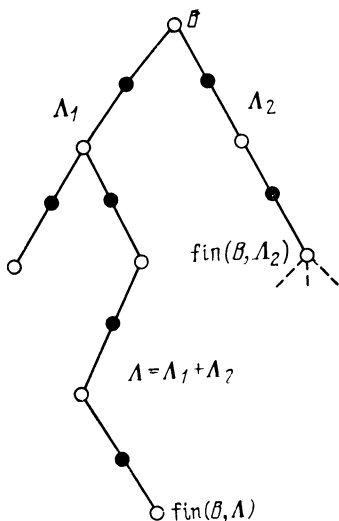


Рис. 25.

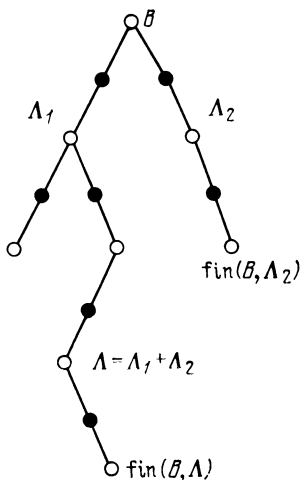


Рис. 26.

влияет на  $\Lambda_2$  или оценка позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$  не лучше для  $\text{col } B$ , чем оценка позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_2)$ :

$$\begin{aligned} \text{col } \Lambda_1 = \text{col } B \ \& \ \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ \& \ M(\text{fin}(B, \Lambda)) = \\ = M(\text{fin}(B, \Lambda_2)) = \emptyset \Rightarrow \Lambda_1 \sim \Lambda_2 \vee \text{оц}(\text{fin}(B, \Lambda)) & \underset{\text{col } B}{\preceq} \\ & \underset{\text{col } B}{\preceq} \text{оц}(\text{fin}(B, \Lambda_2)). \end{aligned}$$

Конструктивно определенные отношения влияния для конкретных игр удовлетворяют этим аксиомам, как говорят, «в основном», т. е. в случаях, когда их утверждения не выполняются, изучаемые ветки, их концы или рассматриваемые ходы удовлетворяют дополнительным условиям, которые можно оговорить или использовать. Таким образом, формулировки доказываемых ниже теорем нужно уточнить, а их доказательства дополнить исследованием «особых» случаев. Однако глав-

ные идеи таких доказательств остаются такими же, как в этой главе. По-видимому, система понятий и аксиом, связанных с отношением влияния имеет неокончательный вид.

В частности, для шашек, шахмат и подобных им игр, а также для многих моделей таких игр, вместо аксиом о ситуациях 3, 4 и 5, можно использовать условия, имеющие место, когда такие ситуации возникают. Эти условия следуют из указываемых ниже свойств рассматриваемых игр.

1. Для всех позиций  $\Lambda$  исследуемой игры  $\mathfrak{A}$  определена функция соотношения материала  $f_m(A)$ .

2. Для любой позиции  $B \in \mathfrak{A}$  и ветки  $\Lambda$  с началом в ней, состоящей из ходов, допустимых в соответствующих позициях по правилам игры  $\mathfrak{A}$ , выполняется условие

$$f_m(\text{fin}(B, \Lambda)) = f_m(B) + \sum_{\Psi \in \Lambda} h(\Psi),$$

где веса  $h(\Psi)$  определены для всех элементов  $\Psi$  множества виртуальных ходов  $V$  и не зависят от позиций, из которых эти ходы делаются.

3. Среди виртуальных ходов множества  $V$  могут существовать так называемые пустые ходы белых и черных, которые мы будем обозначать одним и тем же символом  $m_\emptyset$ , так как это никогда не приведет к недоразумениям. Вес  $h(m_\emptyset)$  пустого хода равен 0, а сам ход всегда ведет в заключительную позицию.

4. Если в заключительную позицию  $F \in \mathfrak{A}$  ведет не пустой ход  $(D, F) \neq m_\emptyset$ , то либо такая позиция имеет оценку, которую мы будем считать проигрышем для  $\text{col } F$  (напомним, что в игре  $\mathfrak{A}$  белые и черные ходят по очереди, и, значит, понятие очереди хода для заключительных позиций имеет смысл), либо  $F$  является позицией особого типа, причем последний случай в некотором приближении можно не учитывать. Например, белые и черные выигрывают в шашки, когда у противника на доске не остается фигур или последние «заперты», т. е. не могут сделать ни одного хода по правилам игры. Такие ситуации возникают, когда очередь хода принадлежит противнику. Точно так же в шахматах мат белым или черным, т. е. их проигрыш, возникает в позициях с очередью хода проигрывающей стороны.

Полному выполнению условия 4 мешает существование третьего исхода игры — ничьей. Однако заключительными позициями с оценкой  $1/2$  можно считать лишь такие, в которых очередь хода принадлежит стороне, добивающейся выигрыша. Это всегда можно сделать для шашек, так как в них ничья — это доказанная невозможность выигрыша какой-либо стороны. То же можно сделать и для шахмат, но с оговоркой, исключающей патовые позиции, которые можно игнорировать или исследовать отдельно (в результате такого исследования рассматриваемые ниже теоремы можно доказать и для шахмат).

Если среди виртуальных ходов игры  $\mathcal{H}$  нет пустых, то для исключения ситуаций типов 3, 4, 5 достаточно одного свойства 4.

5. Если в заключительную позицию  $F$  ведет пустой ход  $(D, F) = m_\emptyset$ , то ее оценка равна соотношению материала:

$$(D, F) = m_\emptyset \Rightarrow \text{оц}(F) = f_m(F).$$

Рассмотрим теперь, как используются эти свойства при исследовании ситуаций типов 3, 4 и 5 (при доказательстве теоремы о переносе результатов оценки группы ходов приходится проводить более сложные рассуждения, но, в основном, они близки к приведенным ниже).

Ситуация типа 3 означает, что  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , позиция  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  — заключительная, а позиция  $\text{fin}(B, \Lambda)$  — нет. Следовательно, среди ходов ветки  $\Lambda$ , а, значит, и  $\Lambda_1$ , нет пустого (по свойству 3 такой ход ведет в заключительную позицию). Когда длина ветки  $\Lambda_1$  четная, в такой ситуации выполняются некоторые условия о ситуации 2, и она исследуется при помощи этих аксиом. В противном случае вследствие свойства 4 заключительная позиция  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  проиграна за  $\text{col } \Lambda_1 \neq \text{col } B$ . В исследуемых случаях это окажется невозможным.

В ситуации типа 4  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , последний ход  $\Theta$  веток  $\Lambda$  и  $\Lambda_1$  один и тот же, позиция  $\text{fin}(B, \Lambda)$  — заключительная, а позиция  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  — нет. Значит, ход  $\Theta$ , ведущий в позицию  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$ , непустой. Когда ветка  $\Lambda_1$  имеет нечетную длину, выполняются условия аксиомы о ситуации 1. Если же эта длина нечетная, то по свойству 4 позиция  $\text{fin}(B, \Lambda)$  проиграна за  $\text{col } \Lambda = \text{col } B$ ,

а это в рассматриваемых при доказательстве теорем о переносе оценки случаях невозможно.

Пусть, наконец,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , последние ходы веток  $\Lambda$  и  $\Lambda_1$  совпадают, а позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$  и  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  — заключительные, т. е. имеет место ситуация 5. Если последний ход  $\Theta$  веток  $\Lambda$  и  $\Lambda_1$  — непустой, то вследствие свойства 4 позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$  и  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  проиграны за одну и ту же сторону. Если же  $\Theta = m_\Delta$ , то вследствие свойства 5

$$\begin{aligned} \text{оц}(\text{fin}(B, \Lambda)) &= f_m(\text{fin}(B, \Lambda)) = f_m(B) + \sum_{\Psi \in \Lambda} h(\Psi) = \\ &= f_m(B) + \sum_{\Psi \in \Lambda_1} h(\Psi) + \sum_{\Psi \in \Lambda_2} h(\Psi) = \\ &= f_m(\text{fin}(B, \Lambda_1)) + \sum_{\Psi \in \Lambda_2} h(\Psi) = \\ &= \text{оц}(\text{fin}(B, \Lambda_1)) + \sum_{\Psi \in \Lambda_2} h(\Psi). \end{aligned}$$

Значит, если

$$\sum_{\Psi \in \Lambda_2} h(\Psi) \leqslant_{\text{col } B} 0 \quad \text{и} \quad \text{оц}(\text{fin}(B, \Lambda_1)) \not\rightarrow_{\text{col } B} m,$$

то

$$\text{оц}(\text{fin}(B, \Lambda)) \not\rightarrow_{\text{col } B} m.$$

Таким образом, невозможно, чтобы позиция  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$  была проиграна за цвет  $\text{col } B$ , а позиция  $\text{fin}(B, \Lambda)$  — нет; однако приходится дополнительно оговорить требование

$$\sum_{\Psi \in \Lambda_2} h(\Psi) \leqslant 0.$$

Введем теперь еще несколько обозначений. Если  $\mathfrak{B}$  — поддереву дерева игры  $\mathfrak{A}$ ,  $B$  — его корень, а  $L(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l)$  — последовательность виртуальных ходов, то можно определить отношение  $L \diamond \mathfrak{B}$ ; последовательность  $L$  определяет ветку с началом  $B$ , состоящую из ходов, допустимых в соответствующих позициях по правилам игры  $\mathfrak{A}$  и принадлежащую поддереву  $\mathfrak{B}$ , т. е.

$$\begin{aligned} L \diamond \mathfrak{B} &:= \Psi_1 = (B, B_1) \in \mathfrak{B} \ \& \ \Psi_2 = \\ &= (B_1, B_2) \in \mathfrak{B} \ \& \ \dots \ \& \ \Psi_l = (B_{l-1}, B_l) \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

В этом случае мы будем говорить, что ветка  $L$  инцидентна поддереву  $\mathfrak{B}$ . При помощи отношения инцидентности можно определить отношения влияния ветки  $L$  на поддерево  $\mathfrak{B}$  дерева игры  $\mathfrak{A}$  и поддерева  $\mathfrak{B}_1$  на поддерево  $\mathfrak{B}_2$  (эти поддеревья должны иметь общий корень):

$$L \sim \mathfrak{B} := \exists \Lambda (\Lambda \diamond \mathfrak{B} \& L \sim \Lambda);$$

$$\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2 := \exists \Lambda_1 \exists \Lambda_2 (\Lambda_1 \diamond \mathfrak{B}_1 \& \Lambda_2 \diamond \mathfrak{B}_2 \& \Lambda_1 \sim \Lambda_2);$$

Мы будем рассматривать некоторые поддеревья  $\mathfrak{C}(B)$  дерева исследуемой игры  $\mathfrak{A}$  и соответствующие им модельные игры, причем в скобках будет указываться начальная позиция этой игры (корень поддерева). Для каждой позиции  $D \in \mathfrak{C}(B)$  множество виртуальных ходов, которым соответствуют дуги  $(D, E) \in \mathfrak{C}(B)$  с началом  $B$ , мы обозначим  $S(D)$ . Ясно, что  $S(D) \subset M(D)$ . Очередь хода  $\text{col}_{\mathfrak{C}(B)}(D)$  в позициях игры  $\mathfrak{C}(B)$  и оценки позиций  $F \in \mathfrak{C}(B)$ , являющихся заключительными в исходной игре, а значит, и в  $\mathfrak{C}(B)$ , определяются естественным образом:

$$\text{col}_{\mathfrak{C}(B)} D := \text{col } D;$$

$$\text{оц}_{\mathfrak{C}(B)}(F) := \text{оц}(F);$$

Если же позиция  $F$  — заключительная только в  $\mathfrak{C}(B)$ , но не в  $\mathfrak{A}$ , то значение ее оценки в модельной игре будет считаться минимальным из всех возможных в игре  $\mathfrak{A}$ , когда очередь хода в  $F$  принадлежит белым, и максимальным из возможных, когда — черным:

$$\begin{aligned} F \in \mathfrak{C}(B) \& M(F) \neq \emptyset \& S(F) = \\ = \emptyset \Rightarrow \forall D \subset \mathfrak{A} \left( \text{оц}_{\mathfrak{C}(B)}(F) \leq_{\text{col } B} \text{оц}(D) \right). \end{aligned}$$

Пусть  $\mathfrak{C}(C)$  — такая модельная игра. В частности, все множества  $S(D)$  для нее могут совпадать с множеством  $M(D)$  виртуальных ходов, допустимых по правилам игры  $\mathfrak{A}$  в соответствующих позициях. Тогда она определяется  $C$ -поддеревом игры  $\mathfrak{A}$ , которое мы будем обозначать  $\mathfrak{A}(C)$ . Модельная игра  $\mathfrak{C}_\tau(B)$  называется *тестозой* для игры  $\mathfrak{C}(C)$ , если  $\text{col } B = \text{col } C$ , и множества

разрешенных ходов в соответствующих друг другу позициях этих игр удовлетворяют условиям:

$$S(C) \subset S(B),$$

$$\left. \begin{aligned} S(\text{fin}(C, \Lambda)) \cap M(\text{fin}(B, \Lambda)) &\subset \\ &\subset S(\text{fin}(B, \Lambda)) \mid \text{col } \Lambda = \text{col } C; \\ S(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap M(\text{fin}(C, \Lambda)) &\subset \\ &\subset S(\text{fin}(C, \Lambda)) \mid \text{col } \Lambda \neq \text{col } C \end{aligned} \right\} \Lambda \diamond \mathfrak{E}(C), \Lambda \diamond \mathfrak{E}_\tau(B)$$

Если ветка  $\Lambda$  инцидентна обоим поддеревьям  $\mathfrak{E}_\tau(B)$  и  $\mathfrak{E}(C)$ , то позицию  $\text{fin}(B, \Lambda) (\text{fin}(C, \Lambda))$  мы будем называть *полученной из  $\text{fin}(C, \Lambda) (\text{fin}(B, \Lambda))$  в результате параллельного переноса*.

Если  $\text{col } B = \text{col } C$  и  $S(C) \subset M(B)$ , то можно рекурсивно построить тестовую модель  $\mathfrak{E}_\tau(B)$  для заданной игры  $\mathfrak{E}(C)$ , определяя множество  $S(D)$  разрешенных в ее позициях ходов следующим образом:

$$S(B) := S(C);$$

$$S(\text{fin}(B, \Lambda)) := M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap S(\text{fin}(C, \Lambda))$$

при  $\Lambda \diamond \mathfrak{E}(C), \Lambda \diamond \mathfrak{E}_\tau(B)$ ;

Однако обычно, когда выбирается начальная позиция  $B$  тестовой модельной игры  $\mathfrak{E}_\tau(B)$ , игра  $\mathfrak{E}(C)$  и даже сама позиция  $C$  еще неизвестны. Если все-таки известно, что множества разрешенных ходов в позициях игры  $\mathfrak{E}(C)$  должны принадлежать подмножествам виртуальных ходов  $R(\Lambda) \subset V$ , определяемых ветками  $\Lambda$ , ведущими в них, то можно попытаться построить тестовую модельную игру  $\mathfrak{E}_\tau(B)$ .

Эта игра определяется рекурсивно своими множествами разрешенных ходов:

$$S(B) := M(B) \cap R(\emptyset);$$

$$S(\text{fin}(B, \Lambda)) := M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \mid \Lambda \diamond \mathfrak{E}_\tau(B);$$

Здесь  $R(\emptyset)$  — множество виртуальных ходов, которому должно принадлежать множество  $S(C)$  ходов, разрешенных в начальной позиции  $C$  игры  $\mathfrak{E}(C)$ . В некоторых моделях игр, используемых в игровом программировании, подмножества  $R(\Lambda)$  множества виртуальных ходов  $V$  одинаковы для всех поддеревьев  $\mathfrak{A}(C)$  с начальными позициями  $C$  достаточно большого ранга. В крайнем случае,  $R(\Lambda) \equiv V$ . Построенная выше модель  $\mathfrak{E}_\tau(B)$  с начальной позицией  $B$  меньшего ранга окажется

тестовой для тех игр  $\mathfrak{M}(C)$ , в начальных позициях  $C$  которых не допустимы виртуальные ходы, которых нет в позиции  $B$ .

Возможность сокращения обхода позиций дерева исходной игры  $\mathfrak{M}$  возникает тогда, когда модель  $\mathfrak{E}_T(B)$  является тестовой для нескольких игр  $\mathfrak{M}(C_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Она является следствием теоремы о переносе оценки хода, которую мы сейчас сформулируем и докажем.

**Теорема о переносе оценки хода.** Пусть выполняются следующие условия.

1. В игре  $\mathfrak{M}$  белые и черные ходят по очереди, определены множество  $V$  виртуальных ходов и отношения влияния ветки на ход, ветку и дерево, удовлетворяющие аксиомам и определениям этого параграфа.

2.  $\mathfrak{E}(C) \subset \mathfrak{M}$  — модельная игра с начальной позицией  $C$ , причем любой ход  $\Theta$ , допустимый в позиции  $C$  по правилам игры  $\mathfrak{M}$ , но не разрешенный в ней по правилам модельной игры  $\mathfrak{E}(C)$ , не разрешен и в других позициях этой игры (естественно, цвета  $\text{col } C$ ).

3.  $L$  — ветка четной длины с началом  $B$  и концом  $C$ ,  $\mathfrak{E}_T(B)$  — тестовая модельная игра для  $\mathfrak{E}(C)$  с начальной позицией  $B$ .

4.  $\Psi_1 \in S(C) \subset S(B)$  — виртуальный ход, причем  $\Psi_1 \in (B, B_1) = (C, C_1)$ .  $\mathfrak{E}_T(B, \Psi_1)$  и  $\mathfrak{E}(C, \Psi_1)$  — поддеревья деревьев  $\mathfrak{E}_T(B)$  и  $\mathfrak{E}(C)$  соответственно, состоящие из позиций и дуг веток  $K(\Psi_1, \dots)$  с первым ходом  $\Psi_1$  (см. рис. 27).

5. Позиция  $B_1$  имеет в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$  оценку  $\text{оц}_{\mathfrak{E}_T(B)}(B_1) \xrightarrow[\text{col } C]{} m$ .  $\mathfrak{E}'_T(B)$  — минимальное  $\text{col } B_1$ -усеченное дерево игры  $\mathfrak{E}_T(B, \Psi_1)$ , все заключительные позиции  $F$  которого имеют оценки  $\text{оц}_{\mathfrak{E}_T(B)}(F) \xrightarrow[\text{col } C]{} m$ .

Тогда либо позиция  $C_1$  имеет в игре  $\mathfrak{E}(C)$  оценку  $\text{оц}_{\mathfrak{E}(C)}(C) \xrightarrow[\text{col } C]{} m$ , либо ветка  $L$  влияет на дерево  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ , либо она влияет на некоторый ход  $\Theta$ , допустимый по правилам игры  $\mathfrak{M}$  и разрешенный в позициях  $B$  и  $C$ , но не допустимый или не разрешенный в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$  после хода  $\Psi_1$  и некоторого ответа на него  $\Psi_2$ .

Из системы наших аксиом можно исключить аксиомы о ситуациях 3, 4 и 5. Тогда к условиям теоремы нужно добавить следующий пункт.

6. Если  $K$  — ветка, инцидентная деревьям  $\mathfrak{E}_\tau(B)$  и  $\mathfrak{E}(C)$ , а позиции  $\text{fin}(B, K)$  и  $\text{fin}(C, K)$  являются заключительными, то

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}(C)}(\text{fin}(C, \Lambda)) \preccurlyeq_{\text{col } C} \text{оц}_{\mathfrak{E}_\tau(B)}(\text{fin}(B, \Lambda));$$

если же заключительной является только одна из этих позиций, то

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}_\tau(B)}(\text{fin}(B, \Lambda)) \xrightarrow{\text{col } \Lambda} m \mid S(\text{fin}(B, \Lambda)) = \emptyset,$$

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}(C)}(\text{fin}(C, \Lambda)) \xrightarrow{\text{col } \Lambda} m \mid S(\text{fin}(C, \Lambda)) = \emptyset.$$

В дальнейшем мы будем называть позиции  $D$  деревьев  $\mathfrak{E}_\tau(B)$  и  $\mathfrak{E}(C)$  с оценками в соответствующих

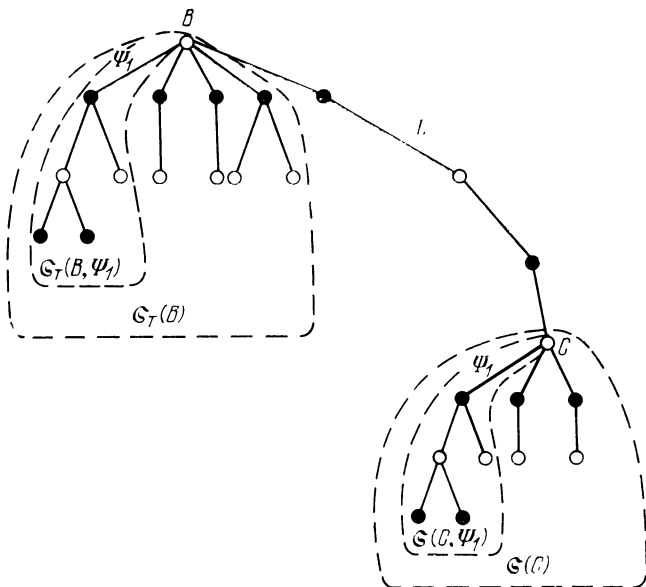


Рис. 27.

играх, худшими для цвета  $\text{col } C$ , чем  $m$ , проигранными, а ходы, ведущие в такие позиции, — проигрывающими.

Основные идеи доказательства теоремы были изложены в предыдущем параграфе. Здесь мы повторим их и отметим основные этапы доказательства, которые в преобразованном виде есть и в доказательствах дру-

гих теорем о возможностях сокращения обхода позиций дерева игры при помощи использования отношений влияния.

Первый этап — это построение ветки  $\Lambda$ , аналогичной рассматриваемой в первой главе критической ветке. Последняя является пересечением согласованных по оценкам минимальных  $b$ - и  $c$ -усеченных деревьев.

Мы будем пересекать дерево  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$  с деревом  $\mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$ . Напомним, что  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$  — минимальное

усеченное поддерево дерева игры  $\mathfrak{E}_T(B, \Psi_1)$  цвета, противоположного  $\text{col } B = \text{col } C$ , заключительные позиции которых вследствие условий теоремы имеют оценки  $\rightarrow m$ ;  $\mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$  — минимальное  $\text{col } C$ -усеченное поддерево игры  $\mathfrak{E}(C, \Psi_1)$ , определяющее в ней оценку позиции  $C$ . Хотя корни этих деревьев различны, пересечение их удастся определить при помощи параллельного переноса веток.

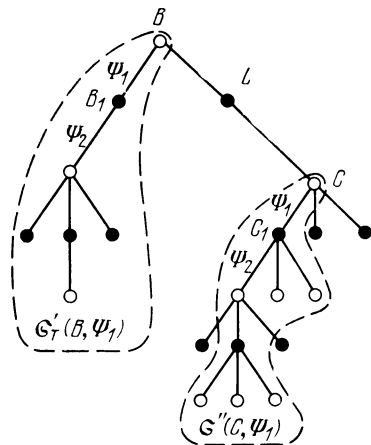


Рис. 28.

Если позиция  $C_1$  в игре  $\mathfrak{E}(C)$  проиграна, то выполняется одна из альтернатив доказываемой нами теоремы. Поэтому мы предположим, что она не проиграна. В этом случае ни один ход  $(D, E) \in \mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$  не проигрывает, и все заключительные позиции дерева  $\mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$  — непроигранные.

Первый ход ветки  $\Lambda$  — это  $\Psi_1 = (B, B_1) = (C, C_1)$ . Если позиция  $B_1$  в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$  не заключительная, то в дереве  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$  есть ход  $\Psi_2 = (B_1, B_2)$  из нее, ведущий в проигранную позицию  $B_2 \in \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ . Вследствие минимальности дерева  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$  такой ход — единственный. Пусть он допустим по правилам игры  $\mathfrak{M}$  и разрешен по правилам модельной игры  $\mathfrak{E}(C)$  из позиции  $C_1 \in \mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$ , полученной из  $B_1$  параллельным переносом. Так как цвет хода  $\Psi_2 = (C_1, C_2)$  противополо-

жен  $\text{col } C$ , этот ход и позиция  $C_2$ , куда он ведет, принадлежат  $\text{col } C$ -усеченному дереву  $\mathcal{Z}''(C, \Psi_1)$ . Аналогичным образом мы перенесем в дерево  $\mathcal{Z}''(B, \Psi_1)$  единственный и непроигрывающий ход  $\Psi_3 = (C_2, C_3) \in \mathcal{Z}''(C, \Psi_1)$ , если он существует, и т. д. (рис. 28).

Так однозначно определяется ветка  $\Lambda$ , инцидентная деревьям  $\mathcal{Z}'_t(B, \Psi_1)$  и  $\mathcal{Z}''(C, \Psi_1)$  и далее непродолжаемая. Она является пересечением дерева  $\mathcal{Z}'_t(B, \Psi_1)$  и параллельно перенесенного в его начальную позицию  $B$  дерева  $\mathcal{Z}''(C, \Psi_1)$ . Мы будем называть ветку  $\Lambda$  *псевдокритической*. Исследование причин непродолжаемости ветки  $\Lambda$  — это второй этап доказательства теоремы. Она может оказаться непродолжаемой по двум причинам:

1) ветка  $\Lambda$ , построенная из позиции  $B$  или  $C$ , достигла заключительной позиции в соответствующей модельной игре;

2) очередной ход  $\Psi_k$ , выбранный в одном из ее концов  $\text{fin}(B, \Lambda)$  или  $\text{fin}(C, \Lambda)$ , недопустим или не разрешен в другом.

Как было показано в предыдущем параграфе, в концах  $\text{fin}(B, \Lambda)$  и  $\text{fin}(C, \Lambda)$  возможны 5 различных ситуаций.

Мы переходим к 3-му этапу — исследованию каждой ситуации и доказательству влияния ветки  $L$  на некоторую ветку дерева  $\mathcal{Z}'_t(B, \Psi_1)$  или на ход, удовлетворяющий условиям теоремы.

1. Ветка  $\Lambda$  имеет нечетную длину  $2j-1$  ( $j \geq 1$ ) и ход  $\Psi_{2j}$  из ее конца (позиции  $B_{2j-1} = \text{fin}(B, \Lambda) \in \mathcal{Z}'_t(B, \Psi_1)$ ), продолжающий ее в дереве  $\mathcal{Z}'_t(B, \Psi_1)$ , не допустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  из соответствующей позиции  $C_{2j-1} = \text{fin}(C, \Lambda) \in \mathcal{Z}''(C, \Psi_1)$  или не разрешен в модельной игре  $\mathfrak{Z}(C)$ . В частности, такая ситуация имеет место, когда позиция  $C_{2j-1}$  — заключительная, а позиция  $B_{2j-1}$  — нет. Так как  $\text{col } C_{2j-1} \neq \text{col } C$ , ходы, разрешенные из позиции  $B_{2j-1}$  и допустимые из позиции  $C_{2j-1}$ , разрешены из последней. Значит, ход  $\Psi_{2j}$  был бы разрешен из позиции  $C_{2j-1}$ , если бы он был допустим, т. е. он недопустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$ . По аксиоме о ситуации  $1 \ L \sim \Lambda * \Psi_{2j}$ . Однако ветка  $\Lambda * \Psi_{2j}$  инцидентна дереву  $\mathcal{Z}'_t(B, \Psi_1)$ , следовательно,  $L \sim \mathcal{Z}'_t(B, \Psi_1)$ .

2. Ветка  $\Lambda$  имеет четную длину  $2j$  ( $j \geq 1$ ) и ход  $\Psi_{2j+1}$  из ее конца

$$C_{2j} = \text{fin}(C, \Lambda) \in \mathcal{Z}''(C, \Psi_1),$$

продолжающий ее в дереве  $\mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$ , не допустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  или не разрешен в игре  $\mathfrak{E}(C)$  из позиции

$$B_{2j} = \text{fin}(B, \Lambda) \in \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1).$$

В такой ситуации  $B_{2j}$  тоже может оказаться заключительной позицией. Так как  $\text{col } C_{2j} = \text{col } C$ , ходы, разрешенные из позиции  $C_{2j}$  и допустимые из позиции  $B_{2j}$ , разрешены из последней. Следовательно, ход  $\Psi_{2j+1}$  не допустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$ . Если он не допустим из позиции  $C = \text{fin}(B, L)$ , то по первой аксиоме о ситуации  $2 \quad L \sim \Lambda$  и, значит,  $L \sim \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ . Если же он допустим в  $C$ , то по условиям теоремы он в ней разрешен (иначе он не был бы разрешен в позиции  $C_{2j} = \text{fin}(C, \Lambda) \in \mathfrak{E}(C)$ ). Разрешен он и в позиции  $B$ , так как  $S(C) \subset S(B)$ . По второй аксиоме о ситуации  $2 \quad L \sim \Lambda$  или  $L \sim \Psi_{2j+1}$ . В первом случае, как и раньше,  $L \sim \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ .

Во втором — когда ход  $\Psi_{2j+1}$  допустим и разрешен из позиции  $B_2 \in \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$  после ходов  $\Psi_1 = (B, B_1)$  из позиции  $B$  и  $\Psi_2 = (B_1, B_2)$  из позиции  $B_1$ , ход  $\Psi_{2j+1} = (B_{2j}, D)$  и позиция  $D$ , куда он ведет, принадлежат  $\text{col } B_1$ -усеченному дереву  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ , так как

$$\text{col } \Psi_{2j+1} = \text{col } C_{2j} = \text{col } C = \text{col } B \neq \text{col } B_1.$$

Следовательно, ветка  $\Lambda'(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_{2j+1})$  инцидентна дереву  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ . По аксиоме о связи влияний на ход и на ветку  $L \sim \Lambda'$  и, значит,  $L \sim \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ . Остается только случай, когда ветка  $L$  влияет на ход  $\Psi_{2j+1}$ , допустимый и разрешенный в ее начале  $B$  и конце  $C$ , но недопустимый или неразрешенный после хода из позиции  $B$  и ответа  $\Psi_2$  на него. Для конкретных игр можно сформулировать дополнительные условия, которым должно удовлетворять дерево  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ , чтобы такой ход  $\Psi_{2j+1}$  отличался от хода  $\Psi_1$ .

3. Ветка  $\Lambda$  имеет нечетную длину  $2j-1$  ( $j \geq 1$ ), ее конец

$$B_{2j-1} = \text{fin}(B, \Lambda) \in \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$$

— заключительная позиция в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$ , а соответствующая позиция

$$C_{2j-1} = \text{fin}(C, \Lambda) \in \mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$$

— незаклЮчительная в дереве игры  $\mathfrak{E}(C)$ . В этом случае  $B_{2j-1}$  — заклЮчительная позиция и в исходной игре  $\mathfrak{M}$ , так как в ней очередь хода принадлежит стороне цвета, противоположного  $\text{col } B$ . Кроме того, если  $M(B_{2j-1}) \neq \emptyset$  и  $S(B_{2j-1}) = \emptyset$ , то этот цвет проигрывает. По аксиоме о ситуациях 3 и 4  $L \sim \Lambda$ , а значит,  $L \sim \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ . Если же мы отказались от этой аксиомы и добавили условия пункта 6, то рассматриваемый случай невозможен. Действительно, так как  $\text{col } \Lambda \neq \text{col } B$ , из условия

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}'_T(B)}(\text{fin}(B, \Lambda)) \xrightarrow[\text{col } \Lambda]{} m$$

следует, что

$$m \xrightarrow[\text{col } B = \text{col } C]{} \text{оц}_{\mathfrak{E}'_T(B)}(\text{fin}(B, \Lambda)),$$

и мы получим противоречие с условием пункта 5 о том, что позиция  $B_{2j} = \text{fin}(B, \Lambda)$  проиграна.

4. Ветка  $\Lambda$  имеет четную длину  $2j$  ( $j \geq 1$ ), ее конец  $C_{2j} = \text{fin}(C, \Lambda) \in \mathfrak{E}''(C, \Psi_1)$  — заклЮчительная позиция в игре  $\mathfrak{E}(C)$ , а соответствующая позиция  $B_{2j} = \text{fin}(B, \Lambda) \in \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$  — незаклЮчительная в игре  $\mathfrak{E}'_T(B)$ . В этом случае совершенно аналогичным образом доказываются следующие факты: позиция  $C_{2j}$  — заклЮчительная в игре  $\mathfrak{M}$ ; если выполняется аксиома о ситуациях 3 и 4, то  $L \sim \Lambda$ ; при выполнении условий п. 6 позиция  $C_{2j}$  проиграна.

5. Обе позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$  и  $\text{fin}(C, \Lambda)$  — заклЮчительные в соответствующих модельных играх. Однако они не могут быть обе незаклЮчительными в исходной игре  $\mathfrak{M}$ , так как в этом случае по правилу определения оценок таких позиций они либо обе проиграны, либо обе не проиграны. Если одна из этих позиций — заклЮчительная в модельной игре, а другая — в исходной, то  $L \sim \Lambda$  по аксиоме о ситуациях 3 и 4. Наконец, если обе позиции — заклЮчительные в исходной игре  $\mathfrak{M}$ , то по аксиоме о ситуации 5

$$\text{оц}(\text{fin}(C, \Lambda)) \xrightarrow[\text{col } C]{} \text{оц}(\text{fin}(B, \Lambda))$$

или  $L \sim \Lambda$ . Но вследствие пункта 5, условий и сделанного нами предположения первая возможность не реализуется. Итак,  $L \sim \Lambda$ , т. е.  $L \sim \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ . Если же мы откажемся от этой аксиомы и добавим условия пункта 6,

то и этот случай будет невозможен, так как условия о том, что позиция  $\text{fin}(B, \Lambda)$  проиграна, а  $\text{fin}(C, \Lambda)$  не проиграна, и

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}(C)} \text{fin}(C, \Lambda) \leq_{\text{col } C} \text{оц}_{\mathfrak{E}_T(B)} \text{fin}(B, \Lambda)$$

несовместимы.

Итак, теорема о переносе оценки хода доказана. В доказательстве не использовались некоторые аксиомы, в частности, аксиома о симметрии отношения влияния. Когда мы будем конструктивно определять отношение влияния так, чтобы выполнялась только эта теорема (а также сформулированная ниже теорема о переносе оценки позиции), мы не будем требовать симметрии и построим отношение, которое будет реже выполняться и, значит, даст возможность чаще сокращать обход.

Совершенно аналогичным образом доказывается

Теорема о переносе оценки позиции.

Пусть выполняются следующие условия:

- а) п. п. 1—3 теоремы о переносе оценки хода;
- б) позиция  $B$  имеет в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$  оценку

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}_T(B)} B \xrightarrow{\text{col } C} m,$$

$\mathfrak{E}'_T(B)$  — минимальное усеченное дерево игры  $\mathfrak{E}_T(B)$  цвета, противоположного  $\text{col } B = \text{col } C$ , все заключительные позиции  $F$  которой имеют оценки

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}_T(B)}(F) \xrightarrow{\text{col } C} m.$$

Тогда позиция  $C$  имеет в игре  $\mathfrak{E}(C)$  оценку

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}(C)}(C) \xrightarrow{\text{col } C} m$$

или ветка  $L$  влияет на дерево  $\mathfrak{E}'_T(B)$ .

Как и в теореме о переносе оценки хода, вместо выполнения аксиом о ситуациях 3, 4 и 5 можно потребовать, чтобы выполнялись условия п. 6.

Остановимся на вопросе, почему мы говорим о влиянии ветки  $L$  на дерево  $\mathfrak{E}'_T(B)$  или дерево  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi_1)$ , а не на псевдокритическую ветку  $\Lambda$ . Когда при обходе дерева игры  $\mathfrak{A}$  или ее модели мы попадаем в позицию  $C$ , обход дерева  $\mathfrak{E}_T(B)$  обычно уже произведен, при этом дерево  $\mathfrak{E}'_T(B)$  и его поддеревья  $\mathfrak{E}'_T(B, \Psi') (\Psi' \in S(B))$

уже известны, а обход позиций  $C$ -поддерева дерева игры  $\mathfrak{M}$  или его модели еще не производился. Следовательно, в этот момент псевдокритическая ветка  $\Lambda$  нам неизвестна, а решение о сокращении обхода нужно принимать. Поэтому приходится пользоваться информацией о ветке  $L(B, \dots, C)$  и деревьях  $\mathfrak{E}'_+(B)$ , также  $\mathfrak{E}'_+(B, \Psi)$  для  $\Psi \in S(B)$ .

### § 3. Разложение веток и его использование для сокращения обхода

Одним из неприятных ограничений в условиях теоремы о переносе оценки хода является то, что в позициях  $C$ , обход из которых мы хотим сократить, нельзя рассматривать ни одного хода  $\Theta$ , невозможного по правилам игры  $\mathfrak{M}$  из начальной позиции  $B$  тестовой модельной игры  $\mathfrak{E}_+(B)$ . Таким образом, позиция  $B$  должна с точки зрения  $\text{sol } B$  «строго мажорировать» рассматриваемые позиции  $C$ . Однако, как правило, ходы ветки  $L$  с началом  $B$  и концом  $C$  предоставляют противнику «новые возможности», часто «не имеющие отношения» к вариантам модельной игры  $\mathfrak{E}_+(B)$ .

С другой стороны, при доказательстве теоремы предполагается, что обход дерева  $\mathfrak{E}_+(B)$  производится без отсечений, основанных на отсутствии влияния одних его веток на другие. Таким образом, на него тратится больше времени, чем возможно. Исследовать возможности рекурсивного сокращения обхода на основе многократного использования метода аналогии, по-видимому, нелегко. В этом направлении сделаны лишь первые шаги. Они потребовали привлечения новых идей, которые, вероятно, имеют достаточно общий характер. В этом параграфе мы попытаемся дать читателю некоторое представление о них. Мы рассмотрим некоторые возможности сокращения обхода, когда в конце  $C = = \text{fin}(B, L)$  ветки  $L$  четной длины допустимы некоторые ходы  $\Theta$ , не принадлежащие множеству  $S(B)$  разрешенных ходов в начальной позиции тестовой модельной игры  $\mathfrak{E}_+(B)$ . Часть таких возможностей связана с допустимостью исследования некоторых ходов  $\Psi \in \in S(B)$  независимо один от другого.

Пусть  $\mathfrak{E}$  — модельная игра со следующими свойствами.

В позициях  $\text{fin}(C, \Lambda)$  ее поддеревьев  $\mathfrak{C}(C)$  разрешены все виртуальные ходы из подмножеств  $R(\Lambda)$  и только они, т. е.

$$S(\text{fin}(C, \Lambda)) = M(\text{fin}(C, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \quad | \Lambda \diamond \mathfrak{C}(C).$$

Определено также множество  $R(\Phi) \subset V$ , соответствующие «пустой» ветке  $\Phi$ :

$$S(C) = M(C) \cap R(\Phi).$$

Множества  $R(\Lambda)$  «убывают», когда ветка  $\Lambda$  дополняется новыми ходами

$$R(\Lambda_1 + \Lambda_2) \subset R(\Lambda_1) \quad | \text{col}(\Lambda_1 + \Lambda_2) = \text{col} \Lambda_1.$$

В частности, все множества  $R(\Lambda) \subset R(\Phi)$ .

Таким условиям удовлетворяют многие модельные игры. Например, для абсолютной схемы

$$R(\Lambda) = \begin{cases} V, & \text{если } r(\text{fin}(C, \Lambda)) < n, \\ V_f, & \text{если } r(\text{fin}(C, \Lambda)) \geq n, \end{cases}$$

где  $r(D)$  — ранг позиции  $D$  в дереве игры  $\mathfrak{A}$ ,  $n$  — глубина модели,  $V_f \subset V \cup m_\Phi$  — множество ходов форсированной игры. Для тихой игры

$$R(\Lambda) = \begin{cases} V, & \text{если } r(\text{fin}(C, \Lambda)) < n \\ & \text{или } |V_f \cap \{\Lambda\}| > \rho(\Lambda) - d(C), \\ V_f & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $\{\Lambda\}$  — множество ходов ветки  $\Lambda$ ,  $\rho(\Lambda)$  — ее длина,  $|U|$  — число элементов множества  $U$ ,  $d(C)$  — количество тихих ходов, разрешенных на ветке. Наконец, им удовлетворяет сама исходная игра  $\mathfrak{A}$ : нужно только считать, что все множества  $R(\Lambda) = V$ .

Тестовая модельная игра  $\mathfrak{C}_\tau(B)$ , которую мы в дальнейшем будем рассматривать, должна удовлетворять следующим условиям.

1. Любой ход  $\Psi \in S(B)$  из начальной позиции проигрывает, т. е.

$$\text{оц}_{\mathfrak{C}_\tau(B)}(B) \xrightarrow{\text{col } B} m,$$

где  $m$  — заданная оценка.

2. Новый ход  $\Theta$  из позиции

$$D = \text{fin}(B, \Lambda) \in \mathfrak{C}_\tau(B)$$

цвета  $\text{col } B$ , т. е. ход, которого нет в позиции  $B$ , разрешен, если он принадлежит соответствующему множеству  $R(\Lambda)$ :

$$(M(\text{fin}(B, \Lambda)) \setminus M(B)) \cap R(\Lambda) \subset S(\text{fin}(B, \Lambda))$$

при  $\text{col } \Lambda = \text{col } B$ .

3. Если ветка  $\Lambda$  цвета  $\text{col } \Lambda = \text{col } B$  инцидентна дереву игры  $\mathfrak{S}_T(B)$ , то все ходы  $\Psi \in M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap M(B) \cap R(\Lambda)$ , на которые эта ветка влияет, разрешены из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda)$ :

$$\Psi \in M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap M(B) \cap R(\Lambda) \& \Lambda \sim \Psi \& \\ \& \text{col } \Lambda = \text{col } B \Rightarrow \Psi \in S(\text{fin}(B, \Lambda)).$$

4. Пусть

а)  $\mathfrak{S}'_T(B)$  — минимальное усеченное дерево игры  $\mathfrak{S}_T(B)$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ ;

б) заключительные позиции  $F \in \mathfrak{S}'_T(B)$  имеют оценки  $\text{оц}_{\mathfrak{S}(B)}(F) \xrightarrow[\text{col } B]{} m$ ;

в)  $\mathfrak{S}_T(B, \Psi)$  — поддеревья дерева  $\mathfrak{S}_T(B)$ , состоящие из позиций и ходов веток  $\Lambda(\Psi, \dots) \diamond \mathfrak{S}_T(B)$ , первым ходом которых  $\text{init } \Lambda$  является ход  $\Psi \in S(B)$ ;

г)  $\mathfrak{S}'_T(B, \Psi) = \mathfrak{S}'_T(B) \cap \mathfrak{S}_T(B, \Psi)$ .

Тогда, если дерево  $\mathfrak{S}'_T(B, \Psi_1)$  влияет на дерево  $\mathfrak{S}'_T(B, \Psi_2)$  ( $\Psi_1, \Psi_2 \in S(B)$ ), то во всех позициях дерева  $\mathfrak{S}_T(B_1, \Psi_1)$  с очередью хода цвета  $\text{col } B$ , где ход  $\Psi_2$  допустим по правилам игры  $\mathfrak{H}$  и принадлежит соответствующему множеству  $B(\Lambda)$ , он разрешен, т. е.

$$\mathfrak{S}'_T(B, \Psi_1) \sim \mathfrak{S}'_T(B, \Psi_2) \& \Lambda \diamond \mathfrak{S}_T(B, \Psi_1) \& \Psi_2 \in \\ \in M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \Rightarrow \Psi_2 \in S(\text{fin}(B, \Lambda)).$$

В частности, ход  $\Psi_1$  разрешен из всех позиций  $\text{fin}(B, \Lambda) \in \mathfrak{S}_T(B, \Psi_1)$ , где он допустим и принадлежит соответствующему множеству  $R(\Lambda)$ .

Вследствие аксиомы о симметрии отношения влияния ход  $\Psi_1$  также разрешен в позициях дерева  $\mathfrak{S}_T(B, \Psi_2)$ , если он допустим и принадлежит соответствующим множествам  $R(\Lambda)$ .

5. Все ходы, разрешенные из позиции  $D = \text{fin}(B, \Lambda) \in \mathfrak{S}_T(B)$  с очередью хода цвета, противоположного  $\text{col } B$ , принадлежат множеству  $R(\Lambda)$ :

$$S(\text{fin}(B, \Lambda)) \subset M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \mid \Lambda \diamond \mathfrak{S}_T(B), \\ \text{col } \Lambda \neq \text{col } B.$$

Таким образом, мы хотим по отдельности исследовать только ходы  $\Psi$ , разрешенные в начальной позиции  $B$ .

Имеется гипотеза о том, что в каждой позиции достаточно исследовать только новые ходы  $\Theta$  и те из ранее возможных ходов, на ветки которых повлияло уже построенное дерево обхода из рассматриваемой позиции. Доказательство этой гипотезы требует распространения понятия влияния на ветки с разными началами и пока не получено. Ее использование связано с некоторыми алгоритмическими трудностями, так как при этом может оказаться необходимым возвращение в позиции, из которых уже был произведен шаг назад.

Модельную игру  $\mathfrak{S}_\tau(B)$ , в позициях которой цвета  $\text{col } B$ , отличных от начальной позиции  $B$ , по возможности не разрешаются ходы, допустимые в начальной позиции  $B$ , можно построить при помощи итераций. Пусть  $G_0 := S(B)$  и для всех ходов  $\Psi \in S(B)$  множества  $H_0(\Psi)$  — пустые. Когда множества  $G_i \subset S(B)$  и  $H_i(\Psi)$  для  $\Psi \in G_i$  и некоторого  $i \geq 0$  определены, для всех ходов  $\Psi \in G_i$  рекурсивно определяются модельные игры  $\mathfrak{S}_i(B, \Psi)$ :

$$S_\Psi(B) := \{\Psi\};$$

$$S_\Psi(\text{fin}(B, \Lambda)) :=$$

$$= \begin{cases} ((M(\text{fin}(B, \Lambda)) \setminus M(B)) \cup (M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap \\ \cap H_i(\Psi))) \cap R(\Lambda) \mid \text{col } \Lambda = \text{col } B; \\ M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \mid \text{col } \Lambda \neq \text{col } B. \end{cases}$$

Выясним теперь, проиграна ли позиция  $B$  в этих играх, т. е. получает ли она в них оценку  $\underset{\text{col } B}{\rightarrow} m$ .

При этом для проигрывающих ходов  $\Psi$  построим соответствующие минимальные усеченные деревья  $\mathfrak{S}'_i(B, \Psi)$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ . Тогда

$$G_{i+1} := \{\Psi \mid \Psi \in G_i \text{ \& оц}_{\mathfrak{S}_i(B, \Psi)}(B) \underset{\text{col } B}{\rightarrow} m\};$$

$$H_{i+1}(\Psi) := G_{i+1} \cap (H_i(\Psi) \cup \{\Theta \mid \mathfrak{S}'_i(B, \Psi) \sim \mathfrak{S}'_i(B, \Theta)\});$$

(в последнем определении мы предположим, что отношение влияния симметрично, иначе пришлось бы добавлять ходы  $\Theta$ , для которых  $\mathfrak{S}'_i(B, \Theta) \sim \mathfrak{S}'_i(B, \Psi)$ ). После этого можно перейти к следующей итерации.

Вследствие конечности множества  $G_0 = S(B)$  и вложенности множеств  $G_{i+1}$  в множества  $G_i$  для  $i$ , больших некоторого значения  $N$ , эти множества стабилизируются:

$$i > N \Rightarrow G_i = G_N.$$

На следующих итерациях множества  $H_i(\Psi)$  могут только расширяться, однако они остаются подмножествами конечного множества  $G_N$ , и процесс их расширения также должен закончиться. Таким образом, для некоторого  $i > N$  будут выполняться условия

$$G_{i+1} = G_i = G_N,$$

$$\forall \Psi \in G_i \quad H_{i+1}(\Psi) = H_i(\Psi).$$

Значит, модельные игры  $\mathfrak{S}_{i+1}(B, \Psi)$  и  $\mathfrak{S}_i(B, \Psi)$  тоже будут одинаковы.

Модельная игра

$$\mathfrak{S}_\tau(B) = \bigcup_{\Psi \in G_i} \mathfrak{S}_i(B, \Psi)$$

удовлетворяет условиям, которые мы потребовали для тестовой модели, а  $\mathfrak{S}_i(B, \Psi)$  и  $\mathfrak{S}'_i(B, \Psi)$  ( $\Psi \in G_i = S_\tau(B)$ ) являются поддеревьями  $\mathfrak{S}_\tau(B, \Psi)$  и  $\mathfrak{S}'_\tau(B, \Psi)$  соответственно, о которых говорится в пункте 3 условий.

Действительно, справедливы следующие утверждения.

1. Все ходы  $\Psi \in G_i = G_{i+1}$  проигрывают.
2. Пусть

$$\mathfrak{S}_\tau(B) = \bigcup_{\Psi \in G_i} \mathfrak{S}_i(B, \Psi) = \bigcup_{\Psi \in G_{i+1}} \mathfrak{S}_{i+1}(B, \Psi),$$

$\Lambda$  — ветка, инцидентная дереву  $\mathfrak{S}_\tau(B)$ . Если  $\text{col } \Lambda = \text{col } B$ , то

$$(M(\text{fin}(B, \Lambda)) \setminus M(B)) \cap R(\Lambda) \subset S(\text{fin}(B, \Lambda)),$$

так как по определению

$$S(\text{fin}(B, \Lambda)) = ((M(\text{fin}(B, \Lambda)) \setminus M(B)) \cup \bigcup (M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap H_{i+1}(\Psi))) \cap R(\Lambda).$$

Если же  $\text{col } \Lambda \neq \text{col } B$ , то

$$M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap R(\Lambda) = S(\text{fin}(B, \Lambda)).$$

3. Если  $\mathfrak{E}'_t(B, \Psi_1) \sim \mathfrak{E}'_t(B, \Psi_2)$  ( $\Psi_1, \Psi_2 \in S(B)$ ,  $G_i = G_{i+1}$ ), то

$$\Psi_1 \in H_i(\Psi_2) = H_{i+1}(\Psi_2),$$

$$\Psi_2 \in H_i(\Psi_1) = H_{i+1}(\Psi_1).$$

Значит, если ход  $\Psi_2$  допустим из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda) \in \mathfrak{E}_t(B, \Psi_1)$  и принадлежит соответствующему множеству, то он разрешен. Аналогичное утверждение справедливо и для хода  $\Psi_1$  из позиций цвета  $\text{col } B$ , принадлежащих поддереву  $\mathfrak{E}_t(B, \Psi_2)$ .

Однако такой процесс может оказаться слишком длительным. Поэтому на практике, когда вторая или третья итерация еще меняет множества  $G_i$  или  $H_i(\Psi)$ , по-видимому, следует построить модель с большим числом позиций, но по более простому правилу, а именно, произвести следующие операции.

Для каждого хода  $\Psi \in M(B) \cap R(\phi)$  или принадлежащего интересующему нас подмножеству  $S(B) \subset M(B) \cap R(\phi)$  определить рекурсивно игру  $\mathfrak{E}_t(B, \Psi)$ :

$$S_{\Psi}(B) = \{\Psi\};$$

$$S_{\Psi}(\text{fin}(B, \Lambda)) := M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \mid \Lambda \neq \phi,$$

$$\Lambda \diamond \mathfrak{E}_t(B, \Psi).$$

Затем либо изменить  $m$  так, чтобы выполнялись условия

$$\text{оц}_{\mathfrak{E}_t(B, \Psi)}(B) \underset{\text{col } B}{\succ} m, \quad \Psi \in S(B),$$

и рассматривать ранее заданное множество  $S(B) \subset M(B)$  ходов, разрешенных в начальной позиции  $B$ , либо, когда  $m$  задано, изменить множество  $S(B)$ :

$$S(B) := \{\Psi \mid \Psi \in S(B) \ \& \ \text{оц}_{\mathfrak{E}_t(B, \Psi)}(B) \underset{\text{col } B}{\succ} m\};$$

В обоих случаях тестовая модельная игра  $\mathfrak{E}_t(B)$  определяется как объединение игр  $\mathfrak{E}_t(B, \Psi)$  для  $\Psi \in S(B)$ :

$$\mathfrak{E}_t(B) := \bigcup_{\Psi \in S(B)} \mathfrak{E}_t(B, \Psi).$$

**Теорема о переносе оценки группы ходов.**  
Пусть выполняются следующие условия:

1. В игре  $\mathfrak{A}$  белые и черные ходят по очереди, определены множество  $V$  виртуальных ходов и отношения

влияния ветки на ход, ветку, поддерезо и поддереза на поддерезо, удовлетворяющие аксиомам и определениям этого параграфа.

2.  $\mathfrak{S}(C)$  — модельная игра для игры  $\mathfrak{A}$  с начальной позицией  $C$ , причем

$$S(C) = M(C) \cap R(\Phi),$$

$$S(\text{fin}(C, \Lambda)) = M(\text{fin}(C, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \mid \Lambda \diamond \mathfrak{S}(C),$$

$$R(\Lambda_1 + \Lambda_2) \subset R(\Lambda_1) \mid \Lambda \diamond \mathfrak{S}(C), \text{ col } \Lambda = \text{col } \Lambda_1 = \text{col } C.$$

3.  $L$  — ветка четной длины с началом  $B$  и концом  $C$ ,  $\mathfrak{S}_\tau(B)$  — непустая тестовая модельная игра для игры  $\mathfrak{S}(C)$ . Таким образом, выполняются условия

$$S(B) \neq \Phi,$$

$$S(B) \subset S(C),$$

$$\text{оц}_{\mathfrak{S}_\tau(B)}(B) \xrightarrow[\text{col } B = \text{col } C]{} m,$$

$$\left. \begin{aligned} S(\text{fin}(B, \Lambda)) &\subset M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap R(\Lambda), \\ (M(\text{fin}(B, \Lambda)) \setminus M(B)) \cap R(\Lambda) &\subset \\ &\subset S(\text{fin}(B, \Lambda)), \\ \Theta \in S(\text{fin}(B, \Lambda)) \mid (\Theta \in \\ &\in M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap S(B) \cap R(\Lambda) \& \\ &\& \mathfrak{S}'_\tau(B, \Theta) \sim \mathfrak{S}'_\tau(B, \text{init } \Lambda)) \vee \\ &\vee (\Theta \in M(\text{fin}(B, \Lambda)) \cap M(B) \cap \\ &\cap R(\Lambda) \& \Lambda \sim \Theta), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Lambda \diamond \mathfrak{S}_\tau(B), \\ &\text{col } \Lambda = \text{col } B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\text{fin}(C, \Lambda_1 + \Lambda_2)) \cap S(\text{fin}(B, \Lambda_1)) &\subset \\ &\subset S(\text{fin}(C, \Lambda_1 + \Lambda_2)) \mid \Lambda_1 \diamond \mathfrak{S}_\tau(B), \Lambda_1 + \Lambda_2 \diamond \mathfrak{S}_\tau(C), \\ &\text{col } \Lambda_1 = \text{col } (\Lambda_1 + \Lambda_2) \neq \text{col } B. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathfrak{S}'_\tau(B, \Theta) = \mathfrak{S}_\tau(B, \Theta) \cap \mathfrak{S}'_\tau(B)$ ;  $\mathfrak{S}'_\tau(B)$  — минимальное усеченное дерево цвета, противоположного  $\text{col } B$ , с заключительными позициями  $F$ , имеющими оценки  $\text{оц}_{\mathfrak{S}_\tau(B)}(F) \xrightarrow[\text{col } B]{} m$ ;

$\mathfrak{S}_\tau(B, \Theta)$  ( $\Theta \in S(B)$ ) — поддерезья дерева игры  $\mathfrak{S}_\tau(B)$ , состоящие из позиций и ходов, принадлежащих веткам  $\Lambda \diamond \mathfrak{S}_\tau(B)$ , для которых  $\text{init } \Lambda = \Theta$ .

4.  $\mathfrak{Z}(C)$  — модельная игра с начальной позицией  $C$ , причем

$$\begin{aligned} \tilde{S}(C) &= (M(C) \cap R(\phi)) \setminus S(B), \\ S(\text{fin}(C, \Lambda)) &= \left\{ \begin{array}{l} (M(\text{fin}(C, \Lambda)) \cap R(\Lambda)) \setminus S(B) \\ \text{при } \text{col } \Lambda = \text{col } C, \\ M(\text{fin}(C, \Lambda)) \cap R(\Lambda) \\ \text{при } \text{col } \Lambda \neq \text{col } C, \end{array} \right\} \Lambda \diamond \tilde{\mathfrak{Z}}(C), \\ &\quad \text{оц}_{\tilde{\mathfrak{Z}}(C)}(C) \xrightarrow{\text{col } C} m. \end{aligned}$$

$\tilde{\mathfrak{Z}}'(C)$  — минимальное усеченное дерево цвета, противоположного  $\text{col } C$ , для игры  $\tilde{\mathfrak{Z}}(C)$  с заключительными позициями  $F$ , имеющими оценки  $\text{оц}_{\tilde{\mathfrak{Z}}(C)}(F) \xrightarrow{\text{col } C} m$ .

$\tilde{\mathfrak{Z}}'(B) = L \cup \tilde{\mathfrak{Z}}'(C)$ , т. е. состоит из позиций и ходов ветки  $L$  и дерева  $\tilde{\mathfrak{Z}}'(C)$ .

Тогда позиция  $C$  проиграна в игре  $\mathfrak{Z}(C)$  (т. е.  $\text{оц}_{\mathfrak{Z}(C)}(C) \xrightarrow{\text{col } B} m$ ) или дерево  $\mathfrak{Z}'_r(B)$  влияет на дерево  $\tilde{\mathfrak{Z}}'(B)$ .

Остановимся на условиях теоремы. Можно изменить ее формулировку, не требуя выполнения аксиом о ситуациях 3, 4 и 5, но используя связь между оценками позиций, очередью хода в них, материальной оценкой и пустым ходом, рассмотренную нами раньше. Тогда доказательство существенно усложнится, но ничего принципиально нового в нем не будет. Можно также заменить игру  $\tilde{\mathfrak{Z}}(C)$ , ветки которой, выходящие из начальной позиции  $C$ , начинаются ходами  $\Theta \in S(C)$ , не принадлежащими множеству  $S(B)$ , тестовой игрой  $\tilde{\mathfrak{Z}}_r(C)$  (аналогичной игре  $\mathfrak{Z}_r(B)$ ). Во внутренних позициях игры  $\tilde{\mathfrak{Z}}_r(C)$  с очередью хода цвета  $\text{col } B$  по возможности не будут разрешены ходы из множества  $S(C) = M(C) \cap R(\phi)$ . Мы не будем заниматься такими обобщениями теоремы. Кроме того, для конкретных игр и конструктивно определенных отношений влияния нужно исследовать случаи, когда не выполняются другие аксиомы. Для шахмат и некоторых их моделей полное доказательство приведено в [15].

Условия, которым должны удовлетворять множества  $S(D)$  разрешенных ходов из позиций  $D$  тестовой модельной игры  $\mathfrak{Z}_r(B)$ , в общем такие, какие были описаны выше. Отличается от них только условие для множеств

$S(D)$  разрешенных ходов в позициях  $D$  с очередью хода цвета, противоположного  $\text{col } B = \text{col } C$ :

$$M(\text{fin}(C, \Lambda_1 + \Lambda_2)) \cap S(\text{fin}(B, \Lambda_1)) \subset S(\text{fin}(C, \Lambda_1 + \Lambda_2)).$$

Оно означает, что в позициях модели  $\mathfrak{Z}(C)$  больших рангов не должны быть запрещены некоторые ходы, которые разрешены в модели  $\mathfrak{Z}_\tau(B)$  из позиций значительно меньшего ранга. Однако на самом деле мы играем в исходную игру  $\mathfrak{A}$ , а не в модельную, и последнюю можем не фиксировать. Если мы разрешим в ней ходы, нужные для того, чтобы доказательство теоремы проходило, модель не станет хуже.

На первом этапе доказательства мы будем строить псевдокритическую ветку  $L_0$  и ее разложение на ветки  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \Lambda_{n-1}$ , где  $n$  — количество ходов  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ , составляющих множество  $S(B)$ . Каждая ветка  $\Lambda_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  будет инцидентна дереву  $\mathfrak{Z}'_\tau(B, \Psi_i)$ , ветка  $\Lambda_{n+1}$  — дереву  $\mathfrak{Z}'(C)$ , но некоторые из веток разложения останутся пустыми (мы будем считать, что пустая ветка  $\emptyset$  инцидентна любому дереву и не влияет ни на какую ветку и ни на какой ход). Кроме ветки  $L_0$ , мы будем рассматривать вспомогательные ветки  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Их началом также является позиция  $B$ . Мы предположим, что позиция  $C$  не проиграна в игре  $\mathfrak{Z}(C)$ , и будем доказывать вторую альтернативу теоремы. Обозначим через  $\mathfrak{Z}''(C)$  минимальное  $\text{col } C$ -усеченное дерево игры  $\mathfrak{Z}(C)$ , заключительные, а, значит, и все остальные, позиции которого не проиграны. Такое дерево существует, так как позиция  $C$  не проиграна.

В процессе построения псевдокритической ветки  $L_0$  должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \Lambda_i &\diamond \mathfrak{Z}'_\tau(B, \Psi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \Lambda_{n+1} &\diamond \mathfrak{Z}'(C), \\ \Lambda_i &\not\sim \Lambda_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \\ \mathfrak{Z}'_\tau(B, \Psi_i) &\not\sim \mathfrak{Z}'_\tau(B, \Psi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \\ \Lambda_i, \Lambda_j &\neq \emptyset, \\ L_{i-1} &= L_i + \Lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ L_i &= L * L_i^c, \\ L_i^c &= \Lambda_{i+1} + \dots + \Lambda_{n+1} \diamond \mathfrak{Z}(C), \\ \text{fin}(B, L_i) &= \text{fin}(C, L_i^c) \in \mathfrak{Z}(C), \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \text{fin}(B, L_0) &\in \mathfrak{Z}''(C), \\ \text{fin}(B, L_n) &\in \mathfrak{Z}'(C). \end{aligned}$$

(некоторые из этих условий непосредственно следуют из других, мы приведем их здесь потому, что ими удобно пользоваться в дальнейшем). Когда длина  $\rho(L_0)$  построенной части псевдокритической ветки  $L_0$  — четная, все ветки  $\Lambda_i$ ,  $L_i$  и  $L_i^c$  должны тоже иметь четную длину. Если  $\rho(L_0)$  — нечетная, то нечетную длину имеют только одна из веток  $\Lambda_i$  и ветки  $L_h$  и  $L_h^c$  при  $h < i$ , причем последние ходы этих веток одинаковы.

В начале построения псевдокритической ветки  $L_0$  мы положим

$$\Lambda_i := \emptyset \quad (i = 1, 2, \dots, n+1);$$

$$L_i := L;$$

$$L_i^c := \emptyset \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

Таким образом, все наши условия будут выполнены. Пусть они выполняются, когда уже построенная часть псевдокритической ветки  $L_0$  имеет четную длину  $\rho(L_0) = \rho(L) + 2j$ , где  $j \geq 0$ . Позиция  $\text{fin}(B, L_0) = \text{fin}(C, L_0^c) \in \mathfrak{E}''(C)$ , т. е. не проиграна. Либо она является заключительной в этой игре, либо имеется единственный и непроигрывающий ход  $\Omega_{2j+1}$  из нее, принадлежащий минимальному  $\text{col } C$ -усеченному дереву  $\mathfrak{E}''(C) \subset \mathfrak{E}(C)$ . В первом случае мы закончим построение ветки  $L_0$  и перейдем к анализу причин ее непродолжительности (см. п. 1 такого анализа, приведенного ниже). Во втором — попытаемся добавить ход  $\Omega_{2j+1}$  в конец ветки  $L_0$ .

Проверим, допустим ли ход  $\Omega_{2j+1}$  из позиций  $\text{fin}(B, L_i)$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если он допустим из такой позиции, то он разрешен. Действительно, так как  $\text{fin}(B, L_i) = \text{fin}(C, L_i^c)$ , этот ход принадлежит множеству  $M(\text{fin}(C, L_i^c))$ . Далее,

$$L_0^c = \underbrace{\Lambda_1 + \dots + \Lambda_i}_{\tilde{\Lambda}_i} + \underbrace{\Lambda_{i+1} + \dots + \Lambda_{n+1}}_{L_i^c} = L_i^c + \tilde{\Lambda}_i,$$

причем, так как длины веток  $L_0^c$  и  $L_i^c$ , четны,  $\text{col } L_0^c = \text{col } L_i^c = \text{col } C$ . Следовательно,  $R(L_0^c) \subset R(L_i^c)$  и

$$\Omega_{2j+1} \in S(\text{fin}(C, L_0^c)) =$$

$$= M(\text{fin}(C, L_0^c)) \cap R(L_0^c) \subset R(L_0^c) \subset R(L_i^c),$$

$$\Omega_{2j+1} \in M(\text{fin}(C, L_i^c)) \cap R(L_i^c) =$$

$$= S(\text{fin}(C, L_i^c)) = S(\text{fin}(B, L_i)).$$

Если для некоторого значения  $i=h$  ход  $\Omega_{2j+1}$ , допустимый из позиции  $\text{fin}(B, L_{h-1})$ , окажется не допустимым из позиции  $\text{fin}(B, L_h)$ , то мы проверим, разрешен ли он из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_h)$ .

Так как  $L_{h-1} = L_h + \Lambda_h$ , ветка  $\Lambda_h$  — непустая. Иначе позиции  $\text{fin}(B, L_{h-1})$  и  $\text{fin}(B, L_h)$  совпадали бы. Если  $\Omega_{2j+1} \in S(\text{fin}(B, \Lambda_h))$ , то мы положим

$$L_i := L_i * \Omega_{2j+1};$$

$$L_i^c := L_i^c * \Omega_{2j+1} \quad (i = 0, 1, \dots, h-1);$$

$$\Lambda_h := \Lambda_h * \Omega_{2j+1}$$

и перейдем к следующему шагу построения псевдокритической ветки  $L_0$  (см. рис. 29). Если же ход  $\Omega_{2j+1}$  окажется не допустимым из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_h)$  по правилам исходной игры  $\mathfrak{A}$  или тестовой модельной игры  $\mathfrak{E}_\tau(B)$ , то мы перейдем к анализу причин ее непродолжаемости (случай 2).

Если ход  $\Omega_{2j+1}$  допустим (и разрешен) из всех позиций  $\text{fin}(B, L_i)$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , то он допустим и из позиции  $\text{fin}(C, \Lambda_{n+1})$ . Действительно,  $L_n^c = \Lambda_{n+1}$  и  $\text{fin}(C, \Lambda_{n+1}) = \text{fin}(C, L_n^c) = \text{fin}(B, L_n)$ , так как  $L_n = L * L_n^c = L + \Lambda_{n+1}$ . Когда

$$\Omega_{2j+1} \in \hat{S}(\text{fin}(C, \Lambda_{n+1})) = \\ = M(\text{fin}(C, \Lambda_{n+1})) \cap R(\Lambda_{n+1}) \setminus S(B),$$

мы положим

$$L_i := L_i * \Omega_{2j+1};$$

$$L_i^c := L_i^c * \Omega_{2j+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

$$\Lambda_{n+1} := \Lambda_{n+1} * \Omega_{2j+1}$$

и перейдем к следующему шагу построения псевдокритической ветки.

Если же ход  $\Omega_{2j+1}$  допустим из позиции  $\text{fin}(C, \Lambda_{n+1})$ , но не разрешен, то он принадлежит множеству  $S(B)$  и совпадает с каким-либо ходом  $\Psi_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Тогда он разрешен во внутренних позициях с очередью хода цвета  $\text{col } B = \text{col } C$  деревьев  $\mathfrak{E}'_\tau(B, \Psi_g)$ , влияющих на дерево  $\mathfrak{E}'_\tau(B, \Psi_i)$ , и во всех позициях последнего с очередью хода того же цвета (он разрешен в аналогичных позициях соответствующих деревьев  $\mathfrak{E}_\tau(B, \Psi_g)$  и  $\mathfrak{E}_i(B, \Psi_i)$ , но для нас это не имеет значения). Разу-

меется, чтобы этот ход был разрешен, он должен быть допустимым по правилам исходной игры  $\mathfrak{A}$ .

Пусть  $\Lambda_h$  — непустая ветка, инцидентная дереву  $\mathfrak{G}'_T(B, \Psi_h)$ , влияющему на дерево  $\mathfrak{G}'_T(B, \Psi_i)$  ( $1 \leq h \leq n$ ),

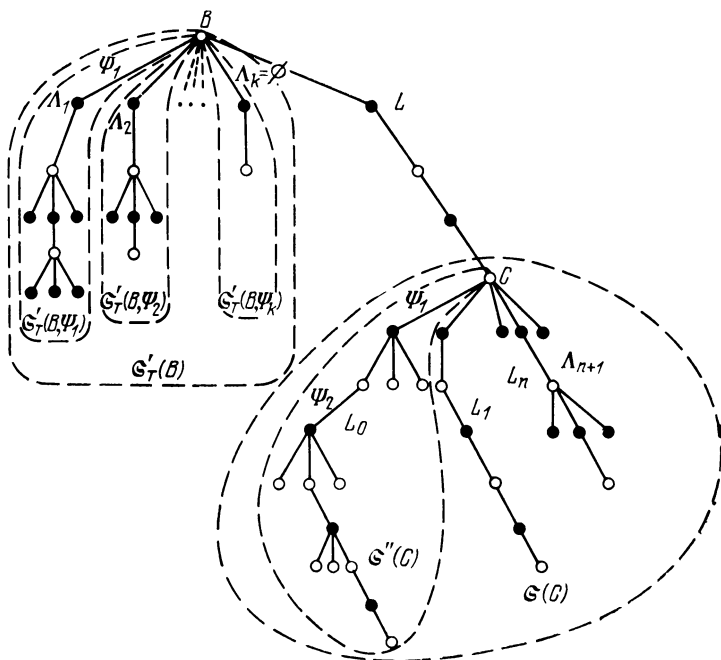


Рис. 29.

и ход  $\Omega_{2j+1} = \Psi_i$  допустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_h)$ . Так как  $L_{h-1} = L_h + \Lambda_h$ ,  $L_{h-1} = L * L_{h-1}^c$  и  $L_h = L * L_h^c$ , выполняется условие  $L_{h-1}^c = L_h^c + \Lambda_h$ . Значит,  $R(L_{h-1}^c) \subset R(\Lambda_h)$ . Из позиции  $\text{fin}(B, L_{h-1}) = \text{fin}(C, L_{h-1}^c)$  ход  $\Psi_i = \Omega_{2j+1}$  разрешен в игре  $\mathfrak{G}(C)$ . Следовательно,

$$\Psi_i = \Omega_{2j+1} \in S(\text{fin}(C, L_{h-1}^c)) = M(\text{fin}(C, L_{h-1}^c)) \cap R(L_{h-1}^c) \subset R(L_{h-1}^c) \subset R(\Lambda_h)$$

и

$$\Psi_i = \Omega_{2j+1} \in M(\text{fin}(B, \Lambda_h)) \cap R(\Lambda_h) \cap S(B).$$

Кроме того,  $\mathfrak{Z}'_T(B, \Psi_h) \sim \mathfrak{Z}'_T(B, \Psi_i)$ . Значит, вследствие условий теоремы (п. 3)

$$\Psi_i = \Omega_{2j+1} \in S(\text{fin}(B, \Lambda_h)).$$

Мы добавим этот ход в конец такой ветки  $\Lambda_h$ , которая имеет максимальный номер  $h \leq n$ , и в концы веток  $L_0, L_1, \dots, L_{h-1}$ ; после этого перейдем к следующему шагу построения псевдокритической ветки  $L_0$ .

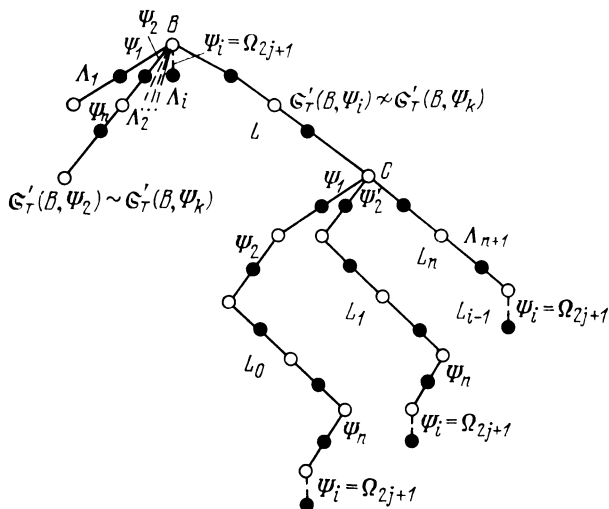


Рис. 30.

Если ход  $\Omega_{2j+1} = \Psi_{h'}$  не допустим по правилам игры  $\mathfrak{M}$  в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_n)$ , то мы перейдем к анализу причин непродолжаемости (случай 3). Наконец, когда все ветки  $\Lambda_i$ , инцидентные деревьям  $\mathfrak{Z}'_T(B, \Psi_i)$ , влияющим на дерево  $\mathfrak{Z}'_T(B, \Psi_{h'})$ , пустые, как, например, при  $j=0$ , мы удлиним ветку  $\Lambda_{h'}$ :

$$L_i := L_i * \Omega_{2j+1};$$

$$L_i^c := L_i^c * \Omega_{2j+1} \quad (i=0, 1, \dots, h-1);$$

$$\Lambda_{h'} := \Lambda_{h'} * \Omega_{2j+1} = \phi * \Omega_{2j+1} = \Lambda(\Omega_{2j+1}) = \Lambda(\Psi_{h'});$$

— и перейдем к следующему шагу (см. рис. 30).

После добавления к псевдокритической ветке  $L_0$  хода  $\Omega_{2j+1}$  цвета  $\text{col } B$  все наши условия будут выполняться.

Действительно, пусть этот ход добавлен также к ветке  $\Lambda_h$  ( $1 \leq h \leq n+1$ ). По построению ветки  $\Lambda_i$  при  $h \neq i$  не изменяются, а добавленный в конец  $\Lambda_h$  ход  $\Omega_{2j+1}$  принадлежит соответствующему дереву  $\mathfrak{E}'_t(B, \Psi_h)$  при  $1 \leq h \leq n$  или  $\tilde{\mathfrak{E}}'(C)$  при  $h = n+1$ . Следовательно, будут выполняться условия  $\Lambda_i \diamond \mathfrak{E}'_t(B, \Psi_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\Lambda_{n+1} \diamond \tilde{\mathfrak{E}}'(C)$ . Отношения  $L_{i-1} = L_i + \Lambda_i$ ,  $L_i = L * L_i^c$ ,  $L_i^c = \Lambda_{i+1} + \dots + \Lambda_{n+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) будут выполняться, так как по обе стороны от символа « $=$ » при  $h \geq i$  ничего не изменится, при  $h = i$  ход  $\Omega_{2j+1}$  будет добавлен в ветки  $L_{i-1}$  и  $\Lambda_i$  а при  $h < i$  — в ветки  $L_{i-1}$ ,  $L_{i-1}^c$ ,  $L_i$  и  $L_i^c$ .  $\text{fin}(B, L_i)$  принадлежит  $\mathfrak{E}(C)$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  потому, что из концов веток  $L_i$ , куда новый ход  $\Omega_{2j+1}$  добавляется, он разрешен по правилам игры  $\mathfrak{E}(C)$ . По аналогичной причине  $\text{fin}(B, L_0) \in \mathfrak{E}''(C)$ , а  $\text{fin}(B, L_n) \in \tilde{\mathfrak{E}}'(C)$ .

Если новый ход  $\Omega_{2j+1}$  был добавлен в конец непустой ветки  $\Lambda_h$ , то и после удлинения непустые ветки  $\Lambda_i$  ( $i \leq n$ ) по-прежнему инцидентны не влияющим друг на друга деревьям  $\mathfrak{E}'_t(B, \Psi_i)$ . Значит, они не влияют друг на друга, а пустые ветки  $\Lambda_i$  вообще ни на какую ветку не влияют. Новое непустое дерево  $\Lambda_h(\Psi_h)$  добавляется только тогда, когда дерево  $\mathfrak{E}'_t(B, \Psi_h)$  не влияет ни на какое из деревьев  $\mathfrak{E}'_t(B, \Psi_i)$ , которым инцидентны непустые ветви  $\Lambda_i$ . Следовательно, условия, связанные с влиянием веток  $\Lambda_i$  и деревьев  $\mathfrak{E}'_t(B, \Psi_i)$  друг на друга, и в этом случае продолжают выполняться.

Наконец, ход  $\Omega_{2j+1}$  был добавлен в конец некоторой ветки  $\Lambda_h$  ( $1 \leq h \leq n+1$ ) и концы веток  $L_0, L_1, \dots, L_{h-1}$ ,  $L_0^c, L_1^c, \dots, L_{h-1}^c$ . Их длины стали нечетными, а длины веток  $\Lambda_i$  при  $i \neq h$ ,  $L_i$  и  $L_i^c$  при  $i \geq h$  остаются четными.

Пусть теперь построена псевдокритическая ветка  $L_0$  нечетной длины  $\rho(L_0) = \rho(L) + 2j - 1$ , где  $j > 0$ , выполняются все наши условия, и последний ход  $\Omega_{2j-1}$  цвета  $\text{col } C$  был добавлен в конец ветки  $\Lambda_h$  ( $1 \leq h \leq n+1$ ) и концы веток  $L$  при  $i = 0, 1, \dots, h-1$ . Если позиция  $\text{fin}(B, \Lambda_h)$  заключительная в соответствующей игре  $\mathfrak{E}_t(B)$  при  $h \leq n$  или  $\tilde{\mathfrak{E}}(C)$  при  $h = n+1$ , то мы закончим построение псевдокритической ветки  $L_0$  и перейдем к анализу причин ее непродолжаемости (случай 4). В противном случае соответствующему минимальному

усеченному дереву  $\mathfrak{Z}'_r(B)$  или  $\tilde{\mathfrak{Z}}'(C)$  принадлежит единственный ход  $\Omega_{2j} \in S(\text{fin}(B, \Lambda_h))$  или  $\hat{S}(\text{fin}(C, \Lambda_{n+1}))$  из конца ветки  $\Lambda_h$  цвета, противоположного col  $B$ . Этот ход ведет к проигрышу цвета col  $B$  в соответствующей модельной игре.

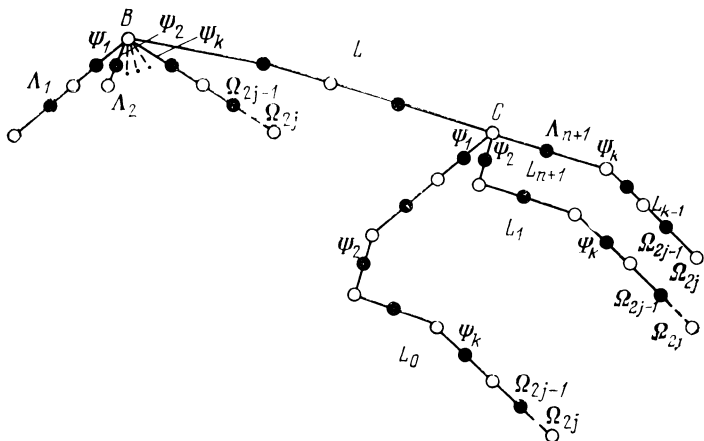


Рис. 31.

Пусть  $\Omega_{2j} \in M(\text{fin}(B, L_i)) = M(\text{fin}(C, L_i^c))$  при  $i < h$ . Так как

$$\begin{aligned} L_i^c &= \Lambda_{i+1} + \dots + \Lambda_h + \dots + \Lambda_{n+1} = \Lambda_h + \tilde{\Lambda}_{i,h}, \\ \Omega_{2j} &\in M(\text{fin}(C, \Lambda_h + \tilde{\Lambda}_{i,h})) \cap S(\text{fin}(B, \Lambda_h)) \subset \\ &\subset S(\text{fin}(C, \Lambda_h + \tilde{\Lambda}_{i,h})) = S(\text{fin}(C, L_i^c)), \end{aligned}$$

т. е. ход  $\Omega_{2j}$  разрешен в игре  $\mathfrak{Z}(C)$ . При  $i = 0$  он ведет из позиции  $\text{fin}(B, L_0) \in \mathfrak{Z}''(C)$  также в позицию дерева  $\mathfrak{Z}''(C)$ , являющегося col  $C$ -усеченным деревом и содержащего все разрешенные ходы из своих позиций с очередью хода цвета, противоположного col  $C$ .

Если ход  $\Omega_{2j}$  допустим (значит, разрешен) из всех позиций  $\text{fin}(B, L_i)$  при  $i < h$ , то мы положим (см. рис. 31)

$$\begin{aligned} L_i &:= L_i * \Omega_{2j}; \\ L_i^c &:= L_i^c * \Omega_{2j} \quad (i = 0, 1, \dots, h-1); \\ \Lambda_h &:= \Lambda_h * \Omega_{2j}. \end{aligned}$$

В противном случае мы закончим построение псевдокритической ветки  $L_0$  и перейдем к анализу причин ее непродолжаемости (случай 5).

После того, как ход  $\Omega_{2j}$  добавлен в концы веток  $L_i$ ,  $L_i^c$  ( $i=0, 1, \dots, h-1$ ) и  $\Lambda_h$ , длины последних станут четными. Длины же веток  $L_i$  и  $L_i^c$  при  $i \geq h$  не изменятся и останутся четными.

Ход  $\Omega_{2j}$  принадлежит поддеревьям  $\mathfrak{S}(C)$ ,  $\mathfrak{S}''(C)$ , а также соответствующему поддереву  $\mathfrak{S}'_r(B, \Psi_n) = \mathfrak{S}'_r(B) \cap \cap \mathfrak{S}_r(B, \Psi_h)$  при  $h \leq n$  или  $\tilde{\mathfrak{S}}'(C)$  при  $h = n+1$ . Для  $i < h$  он добавляется в отношения  $L_{i-1} = L_i + \Lambda_i$ ,  $L_i = L * L_i^c$ ,  $L_i^c = \Lambda_{i+1} + \dots + \Lambda_{n+1}$  слева и справа от символа «=», а для  $i \geq h$  эти отношения не меняются. Следовательно, выполнение наших условий после добавления в псевдокритическую ветку  $L_0$  хода  $\Omega_{2j}$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ , доказывается так же, как их выполнение после добавления в эту ветку хода цвета  $\text{col } B$ .

Таким образом, мы можем перейти к следующему шагу построения псевдокритической ветки  $L_0$ .

Перейдем теперь ко 2-му и 3-му этапам доказательства. Рассмотрим последовательно все случаи, когда ветка  $L_0$  не продолжается.

1. Псевдокритическая ветка  $L_0$  имеет четную длину и ее конец  $\text{fin}(B, L_0) = \text{fin}(C, L_0^c)$  является заключительной позицией в игре  $\mathfrak{S}(C)$ .

Так как  $S(B) \subset S(C)$  — непустое множество, позиция  $C$  не является заключительной, и некоторая ветка  $\Lambda_h$  содержит, по крайней мере, два последних хода  $\Omega_{2j-1}$  и  $\Omega_{2j}$  псевдокритической ветки  $L_0$ . Содержат их и все концы  $\text{fin}(B, L_i) = \text{fin}(C, L_i^c)$  веток  $L_i$  и  $L_i^c$  при  $i < h$ . Позиция  $\text{fin}(B, L_0)$  не проиграна в игре  $\mathfrak{S}(C)$ , а очередь хода в ней принадлежит цвету  $\text{col } C$ . Следовательно, она является заключительной в исходной игре  $\mathfrak{A}$  (новые заключительные позиции в модельных играх проиграны за свой цвет).

Будем рассматривать последовательно позиции  $\text{fin}(B, L_i)$  для  $i=0, 1, \dots, h-1$ .

Если позиция  $\text{fin}(B, L_{i-1})$  заключительная, а позиция  $\text{fin}(B, L_i)$  — нет, то, так как  $L_{i-1} = L_i + \Lambda_i$ , по аксиоме о ситуациях 3 и 4  $\Lambda_i \sim L_i$ .

Если позиции  $\text{fin}(B, L_{i-1})$  и  $\text{fin}(B, L_i)$  заключительные, то по аксиоме о ситуации 5  $\Lambda_i \sim L_i$  или  $\text{oc}(\text{fin}(B, L_{i-1})) \leq_{\text{col } B} \text{oc}(\text{fin}(B, L_i))$ .

Значит, когда при  $i = 1, 2, \dots, h-1$  ветки  $\Lambda_i$  не влияют на  $L_i$ , все позиции  $\text{fin}(B, L_i)$  заключительные и  $\text{оц}(\text{fin}(B, L_0)) \preceq_{\text{col } B}$

$$\preceq_{\text{col } B} \text{оц}(\text{fin}(B, L)) \preceq_{\text{col } B} \dots \preceq_{\text{col } B} \text{оц}(\text{fin}(B, L_{h-1})),$$

т. е. позиция  $\text{fin}(B, L_{h-1})$  тоже не проиграна. Так как  $\text{fin}(B, L_n)$  принадлежит  $\tilde{\mathfrak{E}}'(C)$ , эта позиция не может быть заключительной и непроигранной. Следовательно,  $h-1 < n$ . Рассмотрим позицию  $\text{fin}(B, \Lambda_h) \in \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_h)$ . Она тоже не может быть заключительной и непроигранной. Кроме того,  $L_{h-1} = L_h + \Lambda_h$ . Отсюда вследствие аксиомы о ситуациях 3 и 4 или аксиомы о ситуации 5  $\Lambda_h \sim L_h$ . Итак, мы доказали, что в рассматриваемом случае существуют ветки  $\Lambda_i$  и  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), влияющие друг на друга.

2. Ход  $\Omega_{2j+1}$  цвета  $\text{col } B$  допустим из позиции  $\text{fin}(B, L_{i-1})$  по правилам исходной игры  $\mathfrak{A}$  и, как было показано при построении псевдокритической ветки  $L_0$ , разрешен в игре  $\mathfrak{E}(C)$ ; из позиции  $\text{fin}(B, L_i)$  этот ход допустим, а из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_i)$  либо недопустим, либо неразрешен в тестовой модельной игре  $\mathfrak{E}_T(B)$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Если ход  $\Omega_{2j+1}$  недопустим из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_i)$ , то, так как  $L_{i-1} = L_i + \Lambda_i$ , выполняются условия первой аксиомы о ситуации 2. Следовательно,  $\Lambda_i \sim L_i$ .

Пусть он допустим, но неразрешен в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$ , т. е.

$$\Omega_{2j+1} \in M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \setminus S(\text{fin}(B, \Lambda_i)).$$

Так как  $L_{i-1} = L_i + \Lambda_i$ ,  $L_{i-1} = L * L_{i-1}^c$  и  $L_i = L * L_i^c$ , выполняется условие  $L_{i-1}^c = L_i^c + \Lambda_i$ . Ветка  $L_{i-1}^c$  имеет четную длину. Следовательно,  $\text{col } L_{i-1}^c = \text{col } C$ . Она состоит из ходов, разрешенных по правилам игры  $\mathfrak{E}(C)$  из соответствующих позиций. Значит,  $L_{i-1}^c \diamond \mathfrak{E}(C)$ . Ход  $\Omega_{2j+1}$  разрешен из ее конца  $\text{fin}(C, L_{i-1}^c)$ , т. е.  $\Omega_{2j+1} \in S(\text{fin}(C, L_{i-1}^c))$ . Ветка  $\Lambda_i$  также имеет четную длину, а в ее начале  $B$  очередь хода принадлежит цвету  $\text{col } B = \text{col } C$ . Значит, вследствие пункта 2 условий теоремы

$$\Omega_{2j+1} \in S(\text{fin}(C, L_{i-1}^c)) = M(\text{fin}(C, L_{i-1}^c)) \cap \cap R(L_{i-1}^c) \subset R(L_{i-1}^c) \subset R(\Lambda_i).$$

Таким образом,

$$\Omega_{2j+1} \in (M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \setminus S(\text{fin}(B, \Lambda_i))) \cap R(\Lambda_i).$$

Согласно п. 3 условий теоремы

$$(M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \setminus M(B)) \cap R(\Lambda_i) \subset S(\text{fin}(B, \Lambda_i)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega_{2j+1} &\in (M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \setminus S(\text{fin}(B, \Lambda_i))) \cap R(\Lambda_i) = \\ &= (M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \cap R(\Lambda_i)) \setminus S(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \subset \\ &\subset (M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \cap R(\Lambda_i)) \setminus ((M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \setminus \\ &\quad \setminus M(B)) \cap R(\Lambda_i)) = (M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \setminus \\ &\quad \setminus (M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \setminus M(B))) \cap R(\Lambda_i) = \\ &= M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \cap M(B) \cap R(\Lambda_i) \subset M(B). \end{aligned}$$

Итак,  $\Omega_{2j+1} \in M(\text{fin}(B, L_{i-1}^c)) \cap M(\text{fin}(B, \Lambda_i)) \cap M(B)$ ,  $\Omega_{2j+1} \notin M(\text{fin}(B, L_i^c))$  и  $L_{i-1}^c = L_i^c + \Lambda_i$ , т. е. выполняются условия второй аксиомы о ситуации 2. Следовательно,  $\Lambda_i \sim L_i$  или  $\Lambda_i \sim \Omega_{2j+1}$ . Однако во втором случае ход  $\Omega_{2j+1}$  был бы разрешен из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_i)$  по правилам тестовой модельной игры  $\mathfrak{G}_T(B)$  (п. 3 условий теоремы). Значит, ветка  $\Lambda_i$  влияет на ветку  $L_i$ .

3. Ход  $\Omega_{2j+1}$  цвета  $\text{col } B$  допустим по правилам игры  $\mathfrak{A}$  из позиций  $\text{fin}(B, L_{h-1})$ ,  $\text{fin}(B, L_h)$  и принадлежит множеству  $S(B)$ , значит, он допустим из позиции  $B$ , но не допустим из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_h)$ . При этом  $\Omega_{2j+1} = \Psi_{h'}$  ( $1 \leq h' \leq n$ ) и, если  $h < i \leq n$ , а ветка  $\Lambda_i$  — непустая, то  $\mathfrak{G}'_T(B, \Psi_i) \not\sim \mathfrak{G}'_T(B, \Psi_h)$ .

Так как  $L_{h-1} = L_h + \Lambda_h$ , в рассматриваемом случае также выполняются условия второй аксиомы о ситуации 2. Значит,  $L_h \sim \Lambda_h$  или  $L_h \sim \Omega_{2j+1} = \Psi_{h'}$ . Когда  $L_h \sim \Lambda_h$ , по аксиоме о симметрии отношения влияния  $\Lambda_h \sim L_h$  (мы больше не будем оговаривать использование этой аксиомы и вместо  $L' \sim L''$  будем свободно писать  $L'' \sim L'$ ). Если же  $L_h \sim \Psi_{h'}$ , то мы рассмотрим непустую ветку  $\tilde{\Lambda}_{h'}(\Psi_{h'}, \dots)$ , инцидентную дереву  $\mathfrak{G}'_T(B, \Psi_{h'})$ , которая обязательно существует (например, ветка  $\Lambda(\Psi_{h'})$ , состоящая из одного хода  $\Psi_{h'}$ ) и имеет первый ход  $\Psi_{h'} = \Omega_{2j+1}$ . Если бы для некоторого номера  $i$  ( $h < i \leq n$ ) ветка  $\Lambda_i$  влияла на ход  $\Psi_{h'}$  (она тогда не была бы пустой), то вследствие аксиом о связи

влияний на ход и на ветку она влияла бы на ветку  $\tilde{\Lambda}_{h'}$ , а вследствие определения отношения влияния дерева на дерево  $\mathfrak{S}'_t(B, \Psi_i)$  влияло бы на  $\mathfrak{S}'_t(B, \Psi_{h'})$ . Следовательно,

$$\Lambda_i \not\sim \Psi_{h'} | h < i \leq n.$$

4. Конец ветки  $\Lambda_h$  ( $1 \leq h \leq n+1$ ), имеющей нечетную длину, является заключительной позицией в тестовой модельной игре  $\mathfrak{S}_t(B)$ .

Так как  $\text{fin}(B, \Lambda_h) \in \mathfrak{S}'_t(B)$  и  $\text{col } \Lambda_h \neq \text{col } B = \text{col } C$ , эта позиция является заключительной в исходной игре  $\mathfrak{M}$  и притом проигранной (как и в первом случае непродолжаемости псевдокритической ветки  $L_0$ , позиция, заключительная только в модельной игре, должна быть проиграна за цвет, которому принадлежит очередь хода в ней, т. е. за цвет ведущей в нее ветки, а  $\text{col } \Lambda_h \neq \text{col } C$ ). Рассмотрим позиции  $\text{fin}(B, L_i)$  для  $i = 0, 1, \dots, h-1$ . Если среди них есть незаключительные, то мы выберем позицию  $\text{fin}(B, L_i)$  с максимальным номером  $i < h$ , для которой  $M(\text{fin}(B, L_i)) \neq \emptyset$ . Тогда  $L_i = L_{i+1} + \Lambda_{i+1}$ ,  $M(\text{fin}(B, L_{i+1})) = \emptyset$  или, когда  $i = h-1$ ,  $M(\text{fin}(B, \Lambda_{i+1})) = \emptyset$ . По аксиоме о ситуациях 3 и 4  $\Lambda_{i+1} \sim L_{i+1}$ .

Если же для  $i = 1, 2, \dots, h-1$   $M(\text{fin}(B, L_i)) \neq \emptyset$ , то не все эти позиции проиграны. По крайней мере, не проиграна позиция  $\text{fin}(B, L_0) \in \mathfrak{S}''(C)$ . Мы выберем непроигранную заключительную позицию  $\text{fin}(B, L_i)$  с максимальным номером  $i < h$ . Значит, либо  $\text{fin}(B, L_{i+1})$ , либо (при  $i = h-1$ )  $\text{fin}(B, \Lambda_{i+1})$  — заключительная и проигранная позиция, т. е. при  $i < h-1$

$$\text{oc}(\text{fin}(B, L_i)) \not\leq_{\text{col } B} \text{oc}(\text{fin}(B, L_{i+1})),$$

а при  $i = h-1$

$$\text{oc}(\text{fin}(B, L_i)) \not\leq_{\text{col } B} \text{oc}(\text{fin}(B, \Lambda_{i+1})).$$

Однако, так как  $L_i = L_{i+1} + \Lambda_{i+1}$ , по аксиоме о ситуации 5 либо  $\Lambda_{i+1} \sim L_{i+1}$ , либо при  $i < h-1$

$$\text{oc}(\text{fin}(B, L_i)) \leq_{\text{col } B} \text{oc}(\text{fin}(B, L_{i+1})),$$

а при  $i = h-1$

$$\text{oc}(\text{fin}(B, L_i)) \leq_{\text{col } B} \text{oc}(\text{fin}(B, \Lambda_{i+1})).$$

Вторая альтернатива не согласуется с предположением о проигрыше цвета  $\text{col } B$  в позиции  $\text{fin}(B, L_{i+1})$  или  $\text{fin}(B, \Lambda_{i+1})$  и отсутствия проигрыша в позиции  $\text{fin}(B, L_i)$ . Значит,  $\Lambda_{i+1} \sim L_{i+1}$ .

5. Ход  $\Omega_{2j}$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ , допустимый из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_h)$  ( $1 \leq h \leq n+1$ ) по правилам игры  $\mathfrak{A}$ , не допустим из позиции  $\text{fin}(B, L_i)$  при некотором  $i < h$ . В этом случае  $i < n$ , так как  $\text{fin}(B, L_n) = \text{fin}(C, \Lambda_{n+1})$ . Аналогично двум предыдущим случаям мы выберем позицию  $\text{fin}(B, L_i)$ , из которой недопустим ход  $\Omega_{2j}$  с максимальным номером  $i$ . Тогда в позиции  $\text{fin}(B, L_{i+1})$ , а при  $i = h-1$  в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_{i+1})$  ход  $\Omega_{2j}$  допустим. Так как  $L_i = L_{i+1} + \Lambda_{i+1}$ , выполняются условия аксиомы о ситуации 1. Следовательно, при  $i < h-1$   $L_{i+1} * \Omega_{2j} \sim \Lambda_{i+1}$ , а при  $i = h-1$   $\Lambda_{i+1} * \Omega_{2j} \sim L_{i+1}$ . В первом случае  $L_{i+1} * \Omega_{2j} \diamond \tilde{\mathfrak{E}}'(C)$ , во втором  $\Lambda_{i+1} * \Omega_{2j} \diamond \mathfrak{E}'_T(B, \Psi_{i+1})$ .

Таким образом, когда построение псевдокритической ветки  $L_0$  кончается, должно выполняться одно из следующих условий.

1. Некоторая ветка  $\Lambda_i$  влияет на соответствующую вспомогательную ветку  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

2. Вспомогательная ветка  $L_i$  влияет на ход  $\Psi_{h'} \in \in S(B)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq h' \leq n$ ), причем для  $k = i+1, \dots, n$   $\Lambda_k \not\sim \Psi_{h'}$ .

3. В концы веток  $L_{i+1}, \dots, L_{h-1}, \Lambda_h$  ( $1 \leq i < h \leq n$ ) можно добавить ход  $\Omega_{2j}$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ :

$$L_k := L_k * \Omega_{2j} \quad (k = i+1, \dots, h-1);$$

$$\Lambda_h := \Lambda_h * \Omega_{2j}.$$

При этом будут выполняться условия

$$L_{k-1} = L_k - \Lambda_k \quad (k = i+2, \dots, n);$$

$$\Lambda_{i+1} \sim L_{i+1}.$$

Теперь мы докажем, что некоторая ветка  $\Lambda_k \diamond \mathfrak{E}'_T(B)$  ( $1 \leq k \leq n$ ) влияет на ветку  $L_n \diamond \tilde{\mathfrak{E}}'(B)$ . Тем самым будет доказана вторая альтернатива теоремы о переносе оценки группы ходов — влияние дерева  $\mathfrak{E}'_T(B)$  на дерево  $\tilde{\mathfrak{E}}'(B)$  — и завершено ее доказательство.

Пусть построенные нами ветки  $\Lambda_i$  и  $L_j$  при  $1 \leq i \leq j \leq k$  влияют друг на друга или ветка  $L_j$  влияет на ход  $\Psi_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ), причем для  $k = j+1, \dots$

...,  $n$   $\Lambda_k \not\sim \Psi_i$ . Мы только что показали, что для некоторых значений  $i$  и  $j$  одно из этих условий выполняется (если выполняется первое, то  $i=j$ ). Если  $j=n$ , то  $\mathfrak{Z}'_T(B, \Psi_i) \sim \tilde{\mathfrak{Z}}'(B)$ , значит,  $\mathfrak{Z}'_T(B) \sim \tilde{\mathfrak{Z}}'(B)$ , что и требовалось доказать. Действительно, либо  $\Lambda_i \sim L_n$ , либо, когда  $L_n \sim \Psi_i$ , по аксиоме о связи влияний на ход и на ветку ветка  $L_n$  влияет на любую ветку  $\tilde{\Lambda}_i$  непустого дерева  $\mathfrak{Z}'_T(B, \Psi_i)$ , так как такая ветка содержит свой первый ход  $\Psi_i$ .

Если  $i, j < n$ ,  $L_j \sim \Psi_i$ , то, так как  $L_j = L_{j+1} + \Lambda_{j+1}$ , по первой аксиоме о нестрогой композиции веток  $L_{j+1} \sim \Psi_i$  или  $\Lambda_{j+1} \sim \Psi_i$  или  $\Lambda_{j+1} \sim L_{j+1}$ . Возможность  $\Lambda_{j+1} \sim \Psi_i$  исключается доказанными выше условиями, а остальные имеют рассматриваемый нами вид, но номер вспомогательной ветки  $L_{j+1}$  стал больше. Если же  $\Lambda_i \sim \sim L_j$ , то по второй аксиоме о нестрогой композиции веток

$$\Lambda_i \sim L_{j+1} \quad \text{или} \quad \Lambda_i \sim \Lambda_{j+1} \quad \text{или} \quad \Lambda_{j+1} \sim L_{j+1}.$$

Вторая возможность опять исключена, так как различные ветки  $\Lambda_k$  не влияют друг на друга. Остальные возможности имеют рассматриваемый нами вид, и номер ветки  $L_{j+1}$  также увеличивается. Таким образом, мы докажем, наконец, одно из условий:

$$\Lambda_k \sim L_n \quad (i < k < n) \quad \text{или} \quad L_n \sim \Psi_i,$$

что и требовалось.

О применении доказанной нами теоремы для сокращения обхода подробно говорится в § 5. Здесь мы сделаем лишь некоторые замечания. Пусть в позиции  $B$  была рассмотрена тестовая модельная игра  $\mathfrak{Z}_T(B)$ , и  $C = \text{fin}(B, L)$ , где ветка  $L$  имеет четную длину. Если  $L \not\sim \mathfrak{Z}'_T(B)$ , то сначала можно исследовать ходы  $\Theta \in \in M(C) \setminus S(B)$  из позиции  $C$ , причем в позициях с очередью хода цвета  $\text{col } C = \text{col } B$  не нужно делать ходы, принадлежащие множеству  $S(B)$ . При этом определится некоторое минимальное усеченное дерево  $\tilde{\mathfrak{Z}}'(C)$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ . Если оценка всех ходов из позиции  $C$ , принадлежащих дереву  $\tilde{\mathfrak{Z}}'(B) = L \cup \mathfrak{Z}'(C)$  в игре  $\tilde{\mathfrak{Z}}(C)$ , не лучше для цвета  $\text{col } C = \text{col } B$ , чем оценка позиции  $B$  в тестовой модельной игре  $\mathfrak{Z}_T(B)$ , и  $\mathfrak{Z}'_T(B) \not\sim \tilde{\mathfrak{Z}}'(B)$ , то ходы  $\Psi \in S(B)$  из позиции  $C$  можно

не проверять:  $oc(C) \leq oc_{\tau(B)}(B)$ . При этом одна и та же тестовая модельная игра  $\mathfrak{S}_1(B)$  может «обслужить» несколько позиций  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), где  $C_i = \text{fin}(B, L^{(i)})$  и  $\text{col } L^{(i)} = \text{col } B$ .

#### § 4. Конструктивное определение отношений влияния для некоторых игр

Пусть для некоторой игры  $\mathfrak{A}$  заданы отношение эквивалентности ходов из разных позиций, предикаты  $i(L, \Psi)$ ,  $I(B, L_1, L_2)$  отношений влияния ветки  $L$  на ход  $\Psi$ , ветки  $L_1$  с началом  $B$  на ветку  $L_2$  с тем же началом и выражаемые через них предикаты влияния ветки  $L$  на поддерево  $\mathfrak{S}$  и поддерева  $\mathfrak{S}_1$  на поддерево  $\mathfrak{S}_2$ :

$$I(B, L, \mathfrak{S}) := \bigvee_{\Lambda \diamond \mathfrak{S}} I(B, L, \Lambda);$$

$$I(B, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) := \bigvee_{\Lambda_1 \diamond \mathfrak{S}_1, \Lambda_2 \diamond \mathfrak{S}_2} I(B, L_1, L_2);$$

где позиция  $B$  — начало ветки  $L$  и корень поддеревьев  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}_1$  и  $\mathfrak{S}_2$ . Пусть, кроме того, справедлива аналогичная доказанным выше теорема, на основании которой можно применять метод аналогии в случаях, когда некоторая ветка или поддерево не влияют на другое поддерево. Тогда та же теорема справедлива для отношений влияния, заданных «объемлющим» предикатом  $I'(B, L_1, L_2)$ , для которого

$$\begin{aligned} B \in \mathfrak{A} \& L_1 \diamond \mathfrak{A}(B) \& L_2 \diamond \mathfrak{A}(B) \Rightarrow \\ & \Rightarrow I(B, L_1, L_2) \rightarrow I'(B, L_1, L_2) \end{aligned}$$

( $\mathfrak{A}(B)$  есть  $B$ -поддерево игры  $\mathfrak{A}$ ).

Таким образом, отношения влияния для исследуемой игры  $\mathfrak{A}$  можно определить разными способами.

Они отличаются друг от друга составом и объемом информации о ходах и позициях веток  $L_1$  и  $L_2$ , определяющих предикат  $I(B, L_1, L_2)$ , сложностью алгоритма его вычисления, формулировками теорем о возможностях применения метода аналогии и понятием эквивалентности ходов, к которому этот метод относится.

Например, для справедливости теоремы о переносе оценки позиции отношение влияния не должно быть симметричным, а для справедливости теоремы о переносе

оценки группы ходов его приходится симметризовать (по крайней мере, частично).

Чем больше объем информации, определяющей значения предикатов влияния, сложнее сами предикаты и способы их использования, тем обычно чаще они равны 0. Таким образом, мы получаем возможность эффективнее использовать метод аналогии для сокращения обхода.

С другой стороны, увеличение объема такой информации и усложнение ее структуры приводит к росту времени шага обхода дерева тестовой игры, так как на каждом шагу ее нужно вычислять. Кроме того, увеличивается требуемый объем памяти, так как вычисленную информацию нужно хранить для дальнейшего использования.

Усложнение алгоритмов вычисления предикатов влияния и методов принятия решения по аналогии (например, переход к методам, использующим идею разложения вариантов на, так сказать, независимые составляющие) приводит к росту времени шага обхода, так как на них нужно выполнять эти алгоритмы и принимать решения.

Мы рассмотрим ниже примеры конструктивного определения предиката влияния для шахмат и игры в «крестики-нолики». Будут указаны некоторые варианты предикатов, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки. Для упрощения рассуждений мы вместо шахмат будем рассматривать почти эквивалентную игру, о которой мы уже говорили выше. В ней не обязательно защищаться от шахов, можно бить короля, а выигрышем является взятие короля противника. Если бы пат считался не ничьей, а проигрышем запатованной стороны, то рассматриваемая нами игра была бы эквивалентной шахматам.

В нашей модели разрешены все ходы, допустимые по шахматным правилам, и некоторые другие. Последнее приводит к включению дополнительных позиций в деревья самой игры и ее моделей, применяемых в игровом программировании, и к возникновению «паразитного» влияния из-за ходов, не защищающих своего короля от шаха или подставляющих его под удар. Второе обстоятельство важнее, чем неэквивалентность нашей игры шахматам. Последняя, вообще, не имеет значения,

когда, как обычно, рассматриваются модели с ограниченной глубиной дерева, а до мата и пата еще далеко.

Предикат влияния для шахмат, учитывающий шахи королям и неподвижность фигур, загораживающих их от ударов дальнобойных фигур, будет приведен, однако без обоснования. Упомянутые выше доказательства теорем о переносе оценок позиции и группы ходов [15] были проведены для определяемого им отношения влияния. Мы предположим еще, что среди ходов, составляющих рассматриваемые ветки, нет рокировок и взятий на проходе. Правила рокировки включают отсутствие ударов фигур противника на поля, где стоит король до и после рокировки, а также промежуточные. Такие ограничения родственны не учитываемым нами, связанным с ударом на короля. Взятие на проходе — единственный шахматный ход, при котором взявшая фигура не становится на место взятой. Можно несколько изменить предикат влияния, чтобы учесть эти ходы, но проще всего считать содержащие их ветки влияющими на любые.

Для построения конкретных предикатов влияния изучается следующая схема. Пусть даны ветки  $L_1(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k)$  и  $L_2(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_l)$ , а также их части  $L_1^g(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_g)$  и  $L_2^h(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_h)$  ( $1 \leq g \leq k$ ,  $1 \leq h \leq l$ ). Мы рассмотрим композиции этих частей  $L^{g,h} = L_1^g + L_2^h$ . Отношение влияния должно иметь место, когда возникает одна из ситуаций типа 1 или 2:

из позиции  $\text{fin}(B, L^{2^v-1, 2^n})$  не допустим ход  $\Psi_{2^v}$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ ,

из позиции  $\text{fin}(B, L^{2^v, 2^n-1})$  не допустим ход  $\Theta_{2^n}$  того же цвета или

из позиции  $\text{fin}(B, L^{2^v, 2^n})$  можно сделать ход  $\Omega$  цвета  $\text{col } B$ , который не допустим из позиций  $\text{fin}(B, L^{2^v})$  и  $\text{fin}(B, L^{2^n})$ , а в некоторых случаях только в одной из них (см. рис. 32). Информация о ветках и поддеревьях, исследуемых при обходе, будет состоять из некоторого множества досок. Определение доски было дано в предыдущей главе, но здесь мы его напомним. Доска — это совокупность 64 битов, соответствующих позициям шахматной доски, причем биты отмеченных по каким-либо причинам полей равны единице, а остальные — нулю. Объединение досок  $T_1 \cup T_2$  — доска, где единице равны те и

только те биты, которые равны ей в  $T_1$  или  $T_2$ , в пересечении  $T_1 \cap T_2$  равны единице только биты, равные ей в  $T_1$  и  $T_2$ , в доске несовпадений  $T_1 \oplus T_2$  — биты, имеющие в  $T_1$  и  $T_2$  разные значения, в разности  $T_1 \setminus T_2$  — равные единице в  $T_1$  и нулю в  $T_2$ , в обратной доске  $\sim T$  на местах единиц стоят нули и наоборот,  $[T]$  — предикат, принимающий значение «истина», когда доска — непустая, т. е. среди ее битов есть хотя бы один, равный

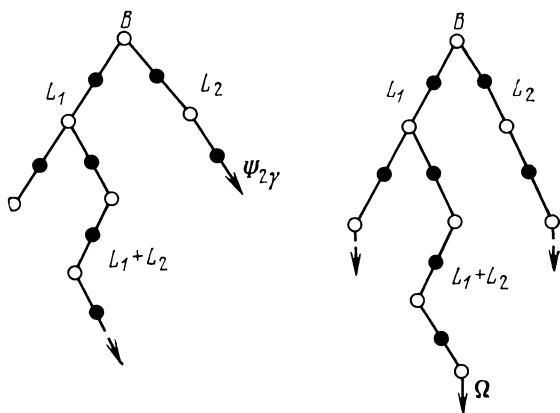


Рис. 32.

единице, и значение «ложь», когда  $T = \emptyset$ , т. е. все биты  $T$  равны нулю.

Введем следующие элементы информации, описывающие виртуальный шахматный ход  $\Psi$ :

- 1)  $E(\Psi)$  — доска, на которой отмечено (единицей) поле, откуда пошла фигура;
- 2)  $I(\Psi)$  — доска, куда эта фигура пошла;
- 3)  $W(\Psi)$  — доска линии хода.

Для ходов дальнобойных фигур — слонов, ладей, ферзей — на доске  $W(\Psi)$  отмечены поля на диагонали, горизонтали или вертикали хода между полями  $E(\Psi)$  и  $I(\Psi)$ . Для остальных ходов  $W(\Psi) = \emptyset$ .

Ходы цвета  $\text{col } B$  мы будем называть своими, противоположного цвета — ходами противника. Доски тех и других ходов изучаемой ветки или поддерева мы будем

объединять. Таким образом,

$$E(s, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi = \text{col } B} E(\Psi);$$

$$E(c, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi \neq \text{col } B} E(\Psi);$$

$$I(s, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi = \text{col } B} I(\Psi);$$

$$I(c, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi \neq \text{col } B} I(\Psi);$$

$$W(c, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi \neq \text{col } B} W(\Psi);$$

где  $\mathfrak{L}$  — исследуемая ветка или поддереву. Аналогичная доска  $W(s, \mathfrak{L})$  нам не понадобится.

Пусть  $P(A, \mu)$  — доска *возможностей* фигуры  $\mu$  в позиции  $A$ . На ней отмечены поля, находящиеся в позиции  $A$  под ее ударом. Если такое поле не занято фигурой того же цвета, то фигура  $\mu$  может на него пойти. Исключением являются пешки, которые ходят не так, как бьют. Поэтому пешке  $\mu$  соответствуют две доски:  $p(A, \mu)$  — доска полей, куда она может пойти, и  $b(A, \mu)$  — доска полей, находящихся под ее ударом. Обозначим  $\lambda(A; \Psi_1, \Psi_2)$  — ветку, ведущую из позиции  $A_1$  и состоящую из двух ходов  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , естественно, разного цвета. Мы иногда будем рассматривать короткие ветки  $\lambda(A; \Psi)$ , состоящие из одного хода. Принадлежность таких веток рассматриваемым нами веткам  $L$  с началом  $B$  или поддереву  $\mathfrak{C}$ , а также их цвет определяются следующим образом:

$$\lambda(A; \Psi_1, \Psi_2) \in L := L = L_1 * \lambda * L_2 \ \& \ A = \text{fin}(B, L_1);$$

$$\lambda(A; \Psi) \in L := L = L_1 * \lambda \ \& \ A = \text{fin}(B, L_1);$$

$$\lambda \in \mathfrak{C} := \exists L (L \diamond \mathfrak{C} \ \& \ \lambda \in L);$$

$$\text{col } \lambda(A; \Psi_1, \Psi_2) := \text{col } \lambda(A; \Psi) := \text{col } A;$$

В первом из определений не требуется, чтобы ветка  $L_2$  состояла из допустимых ходов, когда ее началом является позиция  $B$ .

Она должна быть допустимой только из позиции  $\text{fin}(B, L_1 * \lambda)$ .

Нам будут нужны так называемые доски «новых возможностей»:

$$N(\lambda, \mu) := \left\{ \begin{array}{l} P(\text{fin}(A, \lambda), \mu), \\ \text{если } \mu = \varphi(\Psi'); \\ P(\text{fin}(A, \lambda), \mu) \setminus P(A, \mu), \\ \text{если } \mu \neq \varphi(\Psi'), \end{array} \right\} \quad \mu - \text{не пешка};$$

$$n_{p,b}(\lambda, \mu) := \left\{ \begin{array}{l} p, b(\text{fin}(A, \lambda), \mu), \\ \text{если } \mu = \varphi(\Psi'); \\ \emptyset, \\ \text{если } \mu \neq \varphi(\Psi'), \end{array} \right\} \quad \mu - \text{пешка};$$

где  $A$  — начало ветки,  $\Psi'$  — ее первый и, может быть, единственный ход. Эти доски мы тоже объединим по всем фигурам и двухходовым веткам одного цвета, принадлежащим исследуемой ветке или поддереву  $\mathfrak{L}$ , а также одноходовым веткам, являющимся концами веток  $L$  нечетной длины:

$$N(s, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{L}, \mu \in \Phi, \text{col } \lambda = \text{col } \mu = \text{col } B} N(\lambda, \mu);$$

$$n_{p,b}(s, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{L}, \mu \in \Pi, \text{col } \lambda = \text{col } \mu = \text{col } B} n_{p,b}(\lambda, \mu);$$

где  $\Phi$  — множество фигур (королей, ферзей, ладей, слонов и коней), а  $\Pi$  — множество пешек. Аналогичные доски  $N(c, \mathfrak{L})$  и  $n_{p,b}(c, \mathfrak{L})$  нам не нужны.

Пусть некоторый ход противника  $\Psi_{2\gamma}$ , принадлежащий ветке  $L_1$ , оказался не допустимым из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma-1} + L_2^{2\eta})$ . Это может произойти только в следующих случаях.

1. Фигура противника  $\varphi(\Psi_{2\gamma})$  в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma-1} + L_2^{2\eta})$  не стоит на поле  $E(\Psi_{2\gamma})$ . Так как в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma-1})$  она стоит на этом поле, она либо ушла с него одним из ходов  $\Theta_{2\varepsilon} \in L_2$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ , либо была взята некоторым ходом  $\Theta_{2\delta+1} \in L_2$  цвета  $\text{col } B$  ( $2\varepsilon \leq 2\eta$  или  $2\delta + 1 < 2\eta$ ). Следовательно,

$$E(c, L_1) \cap (E(c, L_2) \cup I(s, L_2)) \neq \emptyset.$$

2. На поле  $I(\Psi_{2\gamma})$  не стоит фигура  $\chi(\Psi_{2\mu})$ . Если  $\chi(\Psi_{2\gamma}) \neq \emptyset$ , т. е. ход  $\Psi_{2\gamma}$  является взятием, то фигура  $\chi(\Psi_{2\gamma})$  ушла с этого поля одним из ходов  $\Theta_{2\delta+1} \in L_2$  цвета  $\text{col } B$  или была взята ходом  $\Theta_{2\varepsilon} \in L_2$  противо-

положного цвета. Если же  $\chi(\Psi_{2\gamma}) = \Phi$ , то поле  $I(\Psi_{2\gamma})$  было занято одним из ходов  $\Theta_h \in L_2$  ( $2\delta + 1$  или  $2\varepsilon$  или  $h \leq 2\eta$ ). Таким образом, в рассматриваемом случае

$$I(c, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup I(s, L_2) \cup I(c, L_2)) \neq \Phi.$$

3. Линия хода  $W(\Psi_{2\gamma})$  перегорожена каким-либо ходом  $\Theta_h \in L_2$ . Тогда

$$W(c, L_1) \cap (I(s, L_2) \cup I(c, L_2)) \neq \Phi.$$

По аналогичным причинам может оказаться не допустимым ход противника  $\Psi_{2\eta}$  из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta-1})$ .

Рассмотрим теперь, в каких случаях из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$  можно сделать ход  $\Omega$  (цвета  $\text{col } B$ ), не допустимый из позиций  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  и  $\text{fin}(B, L_2^{2\gamma})$ . Каждая фигура в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$  стоит там, где она стоит в конце одной из веток  $L_1^{2\gamma}$  или  $L_2^{2\eta}$ , ведущих из позиции  $B$ . Следовательно, фигура  $\varphi(\Omega)$  стоит на поле  $E(\Omega)$  либо в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$ , либо в позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ , либо в обеих позициях. В первом случае, так как  $\varphi(\Omega)$  стоит на том же поле  $E(\Omega)$  в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$ , но не стоит в позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ , она встала на это поле одним из ходов  $\Psi_{2\varepsilon+1} \in L_1$  ( $\varepsilon < \gamma$ ). Значит, все поля, на которые она может пойти из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$ , принадлежат одной из досок новых возможностей  $N(\lambda, \varphi(\Omega))$ ,  $n_p(\lambda, \varphi(\Omega))$  или  $n_b(\lambda, \varphi(\Omega))$  (последним, когда  $\varphi(\Omega)$  — пешка) для одной из двухходовых веток  $\lambda \in L_1^{2\gamma}$  цвета  $\text{col } B$ . Ход  $\Omega$ , естественно, не допустим из позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ , а из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  он может оказаться не допустимым по следующим причинам.

1. Поле  $I(\Omega)$  занято в ней не той фигурой, что в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$ . Если  $\chi(\Omega) \neq \Phi$ , то фигура  $\chi(\Omega)$  пришла на рассматриваемое поле одним из ходов  $\Theta_{2\varepsilon} \in L_2$  ( $\varepsilon \leq \eta$ ), т. е.  $I(\Omega) = I(\Theta_{2\varepsilon})$ . Если же  $I(\Omega) = \Phi$ , то фигура, стоящая на нем в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  или взявшая на это поле каким-либо ходом  $\Theta_g \in L_2$ , ушла одним из ходов  $\Theta_h \in L_2$  ( $h \leq 2\eta$ ). Следовательно,

$$I(\Omega) \subseteq E(s, L_2) \cup E(c, L_2) \cup I(c, L_2)$$

и, так как поле  $I(\Omega)$  принадлежит одной из досок  $N(\lambda, \varphi(\Omega))$ ,  $n_p(\lambda, \varphi(\Omega))$  или  $n_b(\lambda, \varphi(\Omega))$  для некоторой двухходовой ветки  $\lambda \in L_1^{2\gamma}$  цвета  $\text{col } B$ , выполняется одно из условий:

$$\begin{aligned} N(s, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2) \cup I(c, L_2)) &\neq \emptyset, \\ n_p(s, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2)) &\neq \emptyset, \\ n_b(s, L_1) \cap I(c, L_2) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

2. На поле  $I(\Omega)$  в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  стоит фигура  $\chi(\Omega)$ , но линия  $W(\Omega)$  хода  $\Omega$  загорожена какой-либо фигурой. Так как в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$  эта линия свободна, все загораживающие ее фигуры уходят с нее некоторыми ходами  $\Theta_h \in L_2^{2\gamma}$  ( $h \leq 2\gamma$ ). Ближайшая из них к полю  $E(\Omega)$  находится в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  под ударом дальнобойной фигуры  $\varphi(\Omega)$ , и поле, на котором оно стоит, принадлежит доске  $N(s, L_1)$ . Может быть, не она уходит с этого поля, а какая-нибудь взявшая ее на ветке  $L_2$  фигура или фигура, взявшая эту фигуру, и т. д. Все равно

$$N(s, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2)) \neq \emptyset.$$

Случай, когда фигура  $\varphi(\Omega)$  стоит на поле  $E(\Omega)$  в позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ , а не в  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$ , симметричен рассмотренному выше. Поэтому остается рассмотреть случаи, когда эта фигура стоит в позициях  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$ ,  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$  и  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$  на одном и том же поле  $E(\Omega)$ . Тогда на нем же она стоит и в позиции  $B$ . Действительно, в противном случае она приходила бы на поле  $E(\Omega)$  и в ветке  $L_1^{2\gamma}$ , и в ветке  $L_2^{2\eta}$ , причем, если она приходила бы на это поле не однократно, то соответствующие количества приходов  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  были бы на 1 больше, чем количество уходов с этого поля. Тогда на ветке  $L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta}$  число приходов фигуры  $\varphi(\Omega)$  на поле  $E(\Omega)$  было бы на 2 больше, чем число уходов, что невозможно. Кроме того, как мы уже говорили, хотя бы в одной из позиций  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$ ,  $\text{fin}(B, L_2^{2\gamma})$  фигура  $\chi(\Omega)$ , может быть, пустая, стоит на поле  $I(\Omega)$ . Значит, возможны следующие случаи.

1. Ход  $\Omega$  допустим из позиций  $B$ ,  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  и  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ . Нас он не интересует.

2. Ход  $\Omega$  допустим только из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  или из позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ . Если он недопустим из позиции  $B$ , то нас такой случай тоже не интересует. Допустимым же из позиции  $B$  он быть не может. Действительно, иначе в позиции  $B$  на поле  $I(\Omega)$  стояла бы фигура  $\chi(\Omega)$ , а линия  $W(\Omega)$  (если она не пустая) была бы свободна. Пусть ход  $\Omega$  недопустим из позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ . Тогда наш король не взят (он был бы взят и в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$ ). Значит, на поле  $I(\Omega)$  нет фигуры  $\chi(\Omega)$  или линия  $W(\Omega)$  загорожена. В последнем случае на некоторое поле  $p \in W(\Omega)$  встала фигура. Сосчитаем приходы и уходы фигур на поле  $I(\Omega)$  или  $p$  в ветках  $L_1^{2\gamma}$ ,  $L_2^{2\eta}$  и  $L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta}$ .

Так как из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  ход  $\Omega$  допустим, число уходов фигуры  $\chi(\Omega)$  с поля  $I(\Omega)$  равно числу ее возвращений (уходом пустой фигуры  $\chi(\Omega) = \emptyset$  мы называем оккупацию поля  $I(\Omega)$  какой-либо фигуры, а приходом — ее освобождение). Таким же образом число приходов какой-либо фигуры на поле  $p \in W(\Omega)$  равно числу освобождений этого поля. Из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  ход  $\Omega$  недопустим. Значит, фигура  $\chi(\Omega)$  лишний раз уходит с поля  $I(\Omega)$  или на поле  $p$  лишний раз становится какая-либо фигура. Количества приходов на поле и уходов с него на ветке  $L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta}$  равно сумме соответствующих количеств на ветках  $L_1^{2\gamma}$  и  $L_2^{2\eta}$ . Следовательно, в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma} + L_2^{2\eta})$  фигура  $\chi(\Omega)$  не стоит на поле  $I(\Omega)$  или поле  $p$  занято фигурой, и ход  $\Omega$  из нее недопустим. Аналогично рассматривается случай, когда ход  $\Omega$  допустим только из позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$ , т. е. условия применения второй аксиомы о ситуации 2 не возникают.

3. Ход  $\Omega$  недопустим из позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  потому, что фигура  $\chi(\Omega)$  в ней не стоит на поле  $I(\Omega)$ , а из позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$  — потому, что загорожена линия  $W(\Omega)$ . Она не может быть свободной в позиции  $B$ . Иначе она была бы свободной и в позиции  $\text{fin}(B, L_2^{2\eta})$  или оказалась бы загороженной в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\eta})$  (фигура, которая становится на рассматриваемую линию на ветке  $L_2^{2\eta}$ , не может с нее уйти на ветке  $L_1^{2\gamma}$ ). Значит, поле  $I(\Omega)$  в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  попадает под

удар фигуры  $\varphi(\Omega)$  в результате хода  $\Psi_h \in L_1$  ( $h \leq 2\gamma$ ), и  $I(\Omega) \in N(s, L_1)$ . С другой стороны, фигура  $\chi(\Omega)$  попадает на поле  $I(\Omega)$  на ветке  $L_2^{2\eta}$  (если  $\chi(\Omega) = \phi$ , поле  $I(\Omega)$  на ветке  $L_2^{2\eta}$  освобождается). Следовательно,

$$N(s, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2) \cup I(c, L_2)) \neq \phi.$$

4. Линия хода  $W(\Omega)$  освобождается «совместными усилиями» ходов веток  $L_1$  и  $L_2$ . Пусть ближайшее к  $E(\Omega)$  поле линии  $W(\Omega)$  освобождается ходом ветки  $L_1$  и  $p$  — ближайшее к  $E(\Omega)$  поле этой линии, которое освобождается ходом ветки  $L_2$ . Тогда в позиции  $B$  поле  $p$  не находится под ударом фигуры  $\varphi(\Omega)$ , а в позиции  $\text{fin}(B, L_1^{2\gamma})$  находится. Следовательно,  $p \in N(s, L)$ . В то же время  $p \in E(s, L_2) \cup E(c, L_2)$ . Значит,

$$N(s, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2)) \neq \phi.$$

5. Ход  $\Omega$  — это начальный прыжок пешки со второй горизонтали на четвертую или с седьмой на пятую, причем одно из полей перед ней освобождается ходом ветки  $L_1^{2\gamma}$ , а другое — ходом ветки  $L_2^{2\eta}$ . Пусть  $\text{hor}_\gamma$  — доска, на которой отмечены поля  $\gamma$ -й горизонтали,  $T^\dagger$  — сдвиг полей доски  $T$  на одну горизонталь вверх,  $T^\downarrow$  — сдвиг на одну горизонталь вниз,  $\Pi(s, B)$  — доска, где отмечены поля, на которых стоят свои пешки в позиции  $B$ . Если в позиции  $B$  ход белых, то

$$\begin{aligned} G(B, L_1, L_2) &:= \\ &= \Pi(s, B)^\dagger \cap \text{hor}_3 \cap (((E(s, L_1) \cup E(c, L_1))^\dagger \cap \\ &\cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2))) \cup ((E(s, L_1) \cup E(c, L_1)) \cap \\ &\cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2))^\downarrow)) \neq \phi; \end{aligned}$$

Когда в ней ход черных,

$$\begin{aligned} G(B, L_1, L_2) &:= \\ &= \Pi(s, B)^\downarrow \cap \text{hor}_6 \cap (((E(s, L_1) \cup E(c, L_1))^\downarrow \cap \\ &\cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2))) \cup ((E(s, L_1) \cup E(c, L_1)) \cap \\ &\cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2))^\dagger)) \neq \phi; \end{aligned}$$

Для некоторых моделей этот случай можно не учитывать.

Предикат влияния  $\text{Inf}(B, L_1, L_2)$  принимает значение «истина», когда выполняется одно из приведенных

выше условий или условие, симметричное одному из них. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Inf}(B, L_1, L_2) := & [(E(c, L_1) \cap E(c, L_2)) \cup ((I(c, L_1) \cup W(c, L_1)) \cap \\ & \cap (I(s, L_2) \cup I(c, L_2))) \cup ((I(s, L_1) \cup I(c, L_1)) \cap \\ & \cap (I(c, L_2) \cup W(c, L_2))) \cup ((I(c, L_1) \cup N(s, L_1) \cup \\ & \cup n_p(s, L_1)) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2))) \cup \\ & \cup ((E(s, L_1) \cup E(c, L_1)) \cap \\ & \cap (I(c, L_2) \cup N(s, L_2) \cup n_p(s, L_2))) \cup ((N(s, L_1) \cup \\ & \cup n_b(s, L_1)) \cap I(c, L_2)) \cup (I(c, L_1) \cap (N(s, L_2) \cup \\ & \cup n_b(s, L_2))) \cup G(B, L_1, L_2)]; \end{aligned}$$

Эта формула удобнее для вычисления, так как при обходе веток или поддеревьев нужно образовать ограниченное количество досок, а при проверке влияния веток на поддерева или поддеревьев на поддерева образовать строго определенное число их объединений и пересечений. Для исследования свойств предиката влияния лучше другая форма его представления, которую мы сейчас опишем.

Каждая доска, от которой он зависит, равна объединению определенных досок, относящихся к двухходовым веткам  $\lambda(A; \Psi', \Psi'')$ , принадлежащим рассматриваемым веткам  $L$  с началом  $B$  и одноходовым веткам  $\lambda'(A; \Psi)$ , находящимся в концах веток нечетной длины (последние можно рассматривать как формально двухходовые с пустым вторым ходом и пустыми относящимися к нему досками). Все эти короткие ветки имеют цвет  $\text{col } B$ . Вследствие дистрибутивного закона, которому удовлетворяют операции объединения и пересечения досок, приведенную выше формулу предиката влияния можно привести к виду

$$\text{Inf}(B, L_1, L_2) = \left[ \bigcup_{\lambda_1 \in L_1} \bigcup_{\lambda_2 \in L_2} \bigcup_{\zeta \in Z} (T_{\sigma_1(\zeta)}(\lambda_1) \cap T_{\sigma_2(\zeta)}(\lambda_2)) \right],$$

где  $Z$  — вполне определенный набор пересечений досок  $E(\Psi)$ ,  $I(\Psi)$ ,  $W(\Psi)$ ,  $N(\lambda_1, \mu)$ ,  $n_p(\lambda_1, \mu)$  и  $n_b(\lambda_1, \mu)$ , относящихся к ветке  $\lambda_1 \in L_1$  или ее ходам  $\Psi$  (мы обозначаем эти доски  $T_{\sigma_1(\zeta)}(\lambda_1)$ ) с аналогичными досками, относящимися к ветке  $\lambda_2 \in L_2$  (их мы обозначаем  $T_{\sigma_2(\zeta)}(\lambda_2)$ ).

Остановимся на вопросе, как доказываются теоремы о переносе оценки позиции и оценки группы ходов для сконструированного выше предиката влияния. Аксиомы о связи влияний на ход и ветку и первая аксиома о композиции веток нам не будут нужны, так как рассматривать случаи влияния ветки на ход не придется. Аксиома о симметрии выполняется, так как предикат влияния  $\text{Inf}(B, L_1, L_2)$  симметричен относительно досок, относящихся к веткам  $L_1$  и  $L_2$ . Вторая аксиома о композиции веток выполняется, когда ветка  $\Lambda_1 + \Lambda_2$  составлена из двухходовых веток  $\lambda$  цвета  $\text{col } B$ , принадлежащих целиком либо  $\Lambda_1$ , либо  $\Lambda_2$  (и, может быть, одноходовой ветки  $\lambda'$  цвета  $\text{col } B$ , лежащей в конце одной из веток  $\Lambda_1, \Lambda_2$ , а также в конце ветки  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ ).

Предикат влияния  $\text{Inf}(B, \Lambda_1 + \Lambda_2, \Lambda_3)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \text{Inf}(B, \Lambda_1 + \Lambda_2, \Lambda_3) &= \\ &= \left[ \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1 + \Lambda_2} \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \bigcup_{\zeta \in Z} (T_{\sigma_1(\zeta)}(\lambda_1) \cap T_{\sigma_2(\zeta)}(\lambda_2)) \right] = \\ &= \left[ \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_3} \bigcup_{\zeta \in Z} (T_{\sigma_1(\zeta)}(\lambda_1) \cap T_{\sigma_2(\zeta)}(\lambda_2)) \right] \cup \\ &\cup \left[ \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_2} \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_3} \bigcup_{\zeta \in Z} (T_{\sigma_1(\zeta)}(\lambda_1) \cap T_{\sigma_2(\zeta)}(\lambda_2)) \right] = \\ &= \widetilde{\text{Inf}}(B, \Lambda_1, \Lambda_3) \vee \widetilde{\text{Inf}}(B, \Lambda_2, \Lambda_3), \end{aligned}$$

где предикаты  $\widetilde{\text{Inf}}(B, \Lambda_1, \Lambda_3)$  и  $\widetilde{\text{Inf}}(B, \Lambda_2, \Lambda_3)$  отличаются от предикатов влияния  $\text{Inf}(B, \Lambda_1, \Lambda_3)$  и  $\text{Inf}(B, \Lambda_2, \Lambda_3)$  только тем, что вместо досок  $T_\sigma(\lambda)$ , относящихся к двухходовым веткам  $\lambda$  и принадлежащим веткам  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , в  $\widetilde{\text{Inf}}$  пересекаются соответствующие доски  $T_\sigma(\lambda')$ , относящиеся к веткам  $\lambda'$ , состоящим из тех же ходов, но принадлежащим композиции  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ . Однако все доски  $T_\sigma(\lambda)$ , кроме  $N(\lambda, \mu)$  для дальнобойных фигур (ферзей, ладей и слонов), определяются ходами  $\Psi'$  и  $\Psi''$  ветки  $\lambda$  и не зависят от ее начала  $A$ . Значит, для них  $T_\sigma(\lambda) = T_\sigma(\lambda')$ .

Пусть  $\text{Inf}(B, \Lambda_1 + \Lambda_2, \Lambda_3) = 1$ ,  $\text{Inf}(B, \Lambda_1, \Lambda_3) = 0$  и  $\text{Inf}(B, \Lambda_2, \Lambda_3) = 0$  (как всегда, 1 — это истина, 0 — ложь), т. е.  $\Lambda_1 \not\sim \Lambda_3$  и  $\Lambda_2 \not\sim \Lambda_3$ . Тогда хотя бы один из предикатов  $\widetilde{\text{Inf}}(B, \Lambda_1, \Lambda_3)$ ,  $\widetilde{\text{Inf}}(B, \Lambda_2, \Lambda_3)$ , например, первый, равен 1, и одно из определяющих его пересечений

досок  $T_{\sigma_1}(\lambda'_1) \cap T_{\sigma_2}(\lambda_2)$  не пусто. Соответствующее пересечение  $T_{\sigma_1}(\lambda_1) \cap T_{\sigma_2}(\lambda_2)$ , входящее в выражение, определяющее предикат влияния  $\text{Inf}(B, \Lambda_1, \Lambda_3)$ , пусто. Следовательно,  $T_{\sigma_1}(\lambda'_1) = N(\lambda'_1, \mu)$  для какой-нибудь дальнобойной фигуры  $\mu$  цвета  $\text{col } B$ , а  $T_{\sigma_2}(\lambda_2)$  — доска  $E(\Theta)$  для некоторого хода  $\Theta \in \Lambda_3$  или  $I(\Theta)$  для хода  $\Theta \in \Lambda_3$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ . На ней отмечено только одно поле  $p \in N(\lambda'_1, \mu)$ , не принадлежащее доске  $N(\lambda_1, \mu)$ .

Так как  $\lambda'_1 \in \Lambda_1 + \Lambda_2$ , ветка  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$  является строгой композицией веток  $\Lambda'$ ,  $\lambda'_1$  и  $\Lambda''$ , т. е.

$$\Lambda = \Lambda' * \lambda'_1 * \Lambda''.$$

Ветки  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$  состоят из ходов веток  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , причем ходы ветки  $\Lambda_1$  предшествуют в соответствующих ветках  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$  ходам ветки  $\Lambda_2$ , а ходы ветки  $\lambda'_1$  принадлежат ветке  $\Lambda_1$  и находятся в ней между ходами, принадлежащими веткам  $\Lambda'$  и  $\Lambda''$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}\Lambda' &= \Lambda'_1 + \Lambda'_2, \\ \Lambda' * \lambda'_1 &= \Lambda'_1 * \lambda_1 + \Lambda'_2,\end{aligned}$$

где  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_1 * \lambda_1$  — начальные части ветки  $\Lambda_1$ , а  $\Lambda'_2$  — начальная часть ветки  $\Lambda_2$ .

Сначала мы рассмотрим случай, когда первый ход  $\Psi'$  двухходовых веток  $\lambda_1(A; \Psi', \Psi'') \in \Lambda_1$  и  $\lambda'(A'; \Psi', \Psi'') \in \Lambda_1 + \Lambda_2$  — ход фигурой  $\mu$ , т. е.  $\varphi(\Psi') = \mu$ . Тогда

$$\begin{aligned}p &\in N(\lambda'_1, \mu) = P(\text{fin}(B, \Lambda' * \lambda'_1), \mu), \\ p &\notin N(\lambda_1, \mu) = P(\text{fin}(B, \Lambda'_1 * \lambda_1), \mu)\end{aligned}$$

и фигура  $\mu$  стоит в позициях  $\text{fin}(B, \Lambda' * \lambda'_1)$  и  $\text{fin}(B, \Lambda'_1 * \lambda_1)$  на одном и том же поле  $I(\Psi')$ . Значит, во второй позиции линия между полями  $I(\Psi')$  и  $p$  загорожена фигурами. Ближайшая из них к полю  $I(\Psi')$  стоит на поле  $p' \in P(\text{fin}(B, \Lambda'_1 * \lambda_1), \mu) = N(\lambda_1, \mu)$ , которое освобождается некоторым ходом  $\Theta_n \in \Lambda'_1$ . Следовательно,  $E(\Theta_n) = p'$  и поле  $p'$  отмечено в пересечении  $N(\lambda_1, \mu) \cap E(\Theta_n)$ . Последнее не пусто, значит  $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ .

Пусть теперь  $\varphi(\Psi') \neq \mu$ . Тогда фигура  $\mu$  в позициях  $\text{fin}(B, \Lambda')$  и  $\text{fin}(B, \Lambda' * \lambda'_1)$  стоит на одном и том же поле  $q$ , причем

$$p \in N(\lambda'_1, \mu) = P(\text{fin}(B, \Lambda' * \lambda'_1), \mu) \setminus P(\text{fin}(B, \Lambda'), \mu).$$

Значит,

$$p \in P(\text{fin}(B, \Lambda' * \lambda'_1), \mu),$$

$$p \notin P(\text{fin}(B, \Lambda'), \mu),$$

т. е. в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda')$  на линии между полями  $q$  и  $p$  стоит хотя бы одна фигура. Ближайшая из них (может быть, единственная, стоящая на этой линии) уходит с этого поля ходом  $\Psi'$  или  $\Psi''$ . На том же поле  $q$  стоит фигура  $\mu$  в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda'_1)$  или  $\text{fin}(B, \Lambda'_2)$ . Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если фигура  $\mu$  стоит на поле  $q$  только в одной из позиций  $\text{fin}(B, \Lambda'_1)$ ,  $\text{fin}(B, \Lambda'_2)$ , то она встала на это поле одним из ходов  $\Theta_{2e}$  соответствующей ветки  $\Lambda'_1$  или  $\Lambda'_2$  (доказательство, как и выше, основано на счете числа приходов и уходов фигуры  $\mu$  на поле  $q$  в ветке  $\Lambda'_1 + \Lambda'_2$ ). Так как фигура  $\mu$  на ветке  $\lambda_1$  не двигается ( $\varphi(\Psi') \neq \mu$ ), в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda'_1 * \lambda_1)$  она стоит там же, где и в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda'_1)$  (она не может быть взята ходом  $\Psi''$ , иначе ее не было бы и в позиции  $\text{fin}(B, \Lambda' * \lambda'_1)$ ). Следовательно, все поля, находящиеся под ее ударом в той из позиций  $\text{fin}(B, \Lambda'_1 * \lambda_1)$ ,  $\text{fin}(B, \Lambda'_2)$ , где она стоит на поле  $q$ , принадлежат одной из досок новых возможностей  $N(\lambda, \mu)$ , где двухходовая ветка  $\lambda$  принадлежит соответственно ветке  $\Lambda'_1 * \lambda_1$  или  $\Lambda'_2$ . Так как  $\Lambda_1 \not\sim \Lambda_3$  и  $\Lambda_2 \not\sim \Lambda_3$ , поле  $p$  ни одной из этих досок не принадлежит.

Таким образом, поле  $p$  не находится под ударом фигуры  $\mu$  в той из позиций  $\text{fin}(B, \Lambda'_1 * \lambda_1)$ ,  $\text{fin}(B, \Lambda'_2)$ , где она стоит на поле  $q$ . Значит, линия между полями  $q$  и  $p$  в этой позиции загорожена. Пусть  $p'$  — ближайшее к  $q$  поле, на котором стоит загораживающая фигура. Она находится под ударом фигуры  $\mu$ , и, как показано выше, принадлежит одной из досок  $N(\lambda, \mu)$ , где ветка  $\lambda$  принадлежит одной из веток  $\Lambda'_1 * \lambda_1$ ,  $\Lambda'_2$ . Поле  $p'$  освобождается одним из ходов  $\Theta_n$  другой ветки ( $\Lambda'_2$  или  $\Lambda'_1 * \lambda_1$ ). Следовательно,  $N(\lambda, \mu) \cap E(\Theta_n) \neq \emptyset$ , а значит,  $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ .

Пусть, наконец, фигура  $\mu$  стоит на поле  $q$  в позициях  $\text{fin}(B, \Lambda'_1)$ ,  $\text{fin}(B, \Lambda'_2)$ , а значит, и  $\text{fin}(B, \Lambda'_1 * \lambda_1)$ . Ходом  $\Psi'$  или  $\Psi''$  ветки  $\Lambda'_1 * \lambda_1$  с линии между полями  $q$  и  $p$  уходит некоторая фигура. Однако  $p' \in N(\lambda_1, \mu)$ ,

значит, эта линия остается загороженной. Загораживающие эту линию фигуры освобождают ее ходами  $\Theta_n \in \Lambda'_2$ , так как в позиции  $\text{fin}(B', \Lambda' * \lambda'_1)$  она свободна. Значит, рассматриваемая линия освобождается «совместными усилиями» ходов веток  $\Lambda'_1 * \lambda_1$  и  $\Lambda'_2$ . При конструировании предиката влияния было показано, что в этом случае  $N(s, \Lambda'_1 * \lambda_1) \cap (E(s, \Lambda'_2) \cup E(c, \Lambda'_2)) \neq \emptyset$  или  $N(s, \Lambda'_2) \cap (E(s, \Lambda'_1 * \lambda_1) \cup E(c, \Lambda'_1 * \lambda_1)) \neq \emptyset$ . Значит,  $\Lambda'_1 * \lambda_1 \sim \Lambda_2$ , а отсюда следует, что и в рассматриваемом случае  $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ .

Выполнение аксиомы о ситуации 1 и первой аксиомы о ситуации 2 непосредственно следует из конструкции предиката влияния  $I(B, L_1, L_2)$ . При его построении было показано, что условия второй аксиомы о ситуации 2 никогда не имеют места (следовательно, формально эта аксиома выполняется). Поэтому в доказательствах теорем о переносе оценок можно не рассматривать случаи, когда она применяется, а значит, не нужен предикат влияния ветки на ход и связанные с этим влиянием аксиомы. Однако можно ввести другое понятие эквивалентных ходов, при котором количество различных виртуальных ходов уменьшится. Ходы дальнобойных фигур в одинаковом направлении по горизонтали, вертикали или диагонали на одно и то же поле можно считать эквивалентными. Тогда выполнение условий второй аксиомы о ситуации 2 будет возможным, и можно так определить предикат влияния ветки на ход, что вторая аксиома о ситуации и аксиомы о влиянии ветки на ход будут выполняться.

Аксиома о ситуациях 3 и 4 нужна только в случаях, когда ветка  $\Lambda_2$ , конец которой является заключительной позицией, имеет нечетную длину, и эта позиция  $\text{fin}(B, \Lambda_2)$  проиграна (за  $\text{col } B$ ) или конец ветки  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ , имеющей четную длину, является заключительной непроигранной позицией. Можно считать, что в нашей игре таких случаев нет. Действительно, полный проигрыш какой-либо стороны наступает в позиции с ее очередью хода после того, как на предыдущем ходу противник взял короля (если проигрышем считается получение мата, то он также возникает только в позициях со своим ходом). Так как в нашей игре нет пата, заключительная позиция с ничейной оценкой — понятие условное. Поэтому можно считать, что

соглашение противника на ничью происходит только в тех позициях, где очередь хода принадлежит стороне, считающей ничью своим проигрышем. Тогда и заключительные позиции  $\text{fin}(B, L_1)$  и  $\text{fin}(B, L_1 + L_2)$  либо одновременно проиграны, либо обе не проиграны. Следовательно, можно не применять аксиому о ситуации 5.

Таким образом, для нашей игры справедливы обе доказанные выше теоремы о переносе оценок. Если же мы будем рассматривать все правила игры в шахматы, то в конструкцию предиката влияния нужно будет включить доски, связанные с шахами. При этом некоторые из аксиом о влиянии перестанут выполняться во всех случаях, а доказательство теорем о переносе оценок нужно будет дополнить исследованием таких «особых» случаев. Приведем без доказательства конструкцию предиката влияния, учитывающего шахи. Для этого определим дополнительные доски:

1)  $C(\Psi)$  — линия, по которой ход  $\Psi$  дает шах (если дает), включая поле, занятое шахующей фигурой, и поле шахуемого короля;

2)  $C'_{b,c}(\Psi)$  — линия, по которой возникла связка фигуры (если возникла), включая поля, занятые связывающей, связываемой фигурами и королем,  $b$  или  $c$  — цвет связывающей фигуры;

3)  $\bar{W}(\Psi) := W(\Psi) \cup C(\Psi) \cup C'_{\text{col}\Psi}(\Psi)$ ;

4)  $N_c(\lambda)$  — новые возможности дать шах королю цвета, противоположного  $\text{col } \lambda$ , т. е. поля, с которых он попал бы под удар какой-либо фигуры противника, еще не снятой с доски после ходов ветки  $\lambda$ , и не попал под удар перед ними

$$S(\lambda(A; \Psi', \Psi''), \mu) := P(A, \mu) \setminus P(\text{fin}(A, \lambda), \mu);$$

5)  $R(\Psi)$  — поля, занятые фигурами противника около его короля, если ход  $\Psi$  дает последнему шах;

6)  $Q(\Psi)$  — поля около короля, которому ход  $\Psi$  дал шах, находящиеся под ударом фигур цвета  $\text{col } \Psi$ .

Новые доски, соответствующие ходам и двухходовым веткам, принадлежащим исследуемой ветке или поддереву  $\mathcal{Q}$ , а также фигурам данного цвета в позициях, принадлежащих  $\mathcal{Q}$ , мы также будем объединять.

Нам будут нужны следующие доски:

$$\bar{W}(c, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi \neq \text{col } B} \bar{W}(\Psi);$$

$$C(c, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi \neq \text{col } B} C(\Psi);$$

$$N_c(s, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi = \text{col } B} N_c(\lambda);$$

$$S(c, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{L}, \mu \in \Phi \cup \Pi, \text{col } \lambda = \text{col } \mu \neq \text{col } B} S(\lambda, \mu);$$

$$R(s, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi \neq \text{col } B} R(\Psi);$$

$$Q(s, \mathfrak{L}) := \bigcup_{\Psi \in \mathfrak{L}, \text{col } \Psi \neq \text{col } B} Q(\Psi);$$

$$\bar{N}(s, \mathfrak{L}) := N(s, \mathfrak{L}) \cup n_p(s, \mathfrak{L}) \cup n_b(s, \mathfrak{L});$$

Предикат влияния определяется формулой

$$\begin{aligned} \text{Inf}(B, L_1, L_2) &:= \\ &= [((E(s, L_1) \cup E(c, L_1) \cup I(c, L_1)) \cap (E(c, L_2) \cup \\ &\quad \cup I(s, L_2) \cup I(c, L_2) \cup \bar{W}(c, L_2) \cup \bar{N}(s, L_2))) \cup \\ &\quad \cup (I(s, L_1) \cap \bar{W}(c, L_2)) \cup ((E(s, L_1) \cup E(c, L_1)) \cap \\ &\quad \cap (N_c(s, L_2) \cup R(s, L_2))) \cup (N_c(s, L_1) \cap \\ &\quad \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2) \cup \bar{N}(s, L_2))) \cup ((I(s, L_1) \cup \\ &\quad \cup I(c, L_1) \cup R(s, L_1)) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2))) \cup \\ &\quad \cup (\bar{W}(c, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2) \cup I(s, L_2) \cup \\ &\quad \cup I(c, L_2))) \cup (\bar{N}(s, L_1) \cap (E(s, L_2) \cup E(c, L_2) \cup \\ &\quad \cup I(c, L_2) \cup C(c, L_2) \cup N_c(c, L_2))) \cup (C(c, L_1) \cap \\ &\quad \cap \bar{N}(s, L_2)) \cup (S(c, L_1) \cap Q(s, L_2)) \cup (Q(s, L_2) \cap \\ &\quad \cap S(c, L_1)) \cup G(B, L_1, L_2); \end{aligned}$$

Перейдем теперь к построению предиката влияния для игры «крестики-нолики». Прежде всего мы отметим, что ситуация типа 2 в этой игре невозможна. Действительно, пусть  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — ветки четной длины и  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ . В позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_1 + \Lambda_2)$  сторона цвета  $\text{col } B$  может поставить свой знак (мы будем считать, что это нолик) на любое свободное поле и только на него. Однако свободные в этой позиции поля свободны и в позициях  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$ ,  $\text{fin}(B, \Lambda_2)$ . Следовательно, из конца композиции веток  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  допустимы только те

ходы, которые допустимы из конца одной из веток  $\Lambda_1, \Lambda_2$ . Таким образом, остается рассмотреть ситуацию 1.

Пусть  $L_1$  — ветка нечетной длины,  $L_2$  — четной, и в позиции  $\text{fin}(B, L_1)$  можно поставить крестик на поле  $p$ , а в позиции  $\text{fin}(B, L_1 + L_2)$  нельзя. Это может произойти по следующим причинам.

1. Поле  $p$  занято ноликом. Значит, он был поставлен одним из ходов  $\Theta \in L_2$ .

2. Поле  $p$ , на которое ставится крестик ходом  $\Psi_p$  из позиции  $\text{fin}(B, \Lambda_1)$ , уже занято крестиком. Значит, он был поставлен некоторым ходом  $\Theta_{2g} = \Psi_p \in L_2$ . §

Рис. 33.

3. Из позиции  $\text{fin}(B, L_1 + L_2)$  нельзя сделать хода, так как это заключительная позиция, т. е. сторона цвета  $\text{col } B$  предыдущим ходом поставила пятерку. Она состоит из нуликов, которые имелись в позиции  $B$ , поставленных на ветке  $L_1$  и на ветке  $L_2$ , причем два

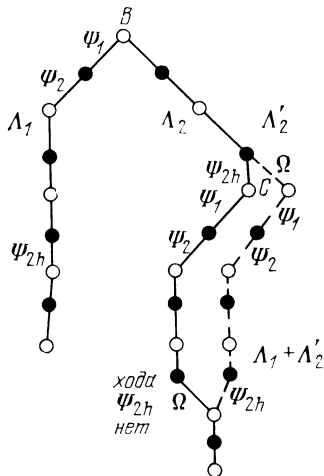


Рис. 33.

последних подмножества пятерки не пусты. Ветка  $L_2$  может отличаться от первоначальной ветки  $L_2^{(0)}$ , с которой мы начинали построение псевдокритической ветки, но ходов цвета  $\text{col } B$  мы не меняли. Значит, рассматриваемая пятерка состоит из ноликов веток  $L_1$ ,  $L_2^{(0)}$  и позиции  $B$ .

Таким образом, мы приходим к следующему определению предиката влияния  $\text{Inf}(B, L_1, L_2)$ : пусть  $T^{(0)}(B)$  — доска, на которой нолики стоят на тех полях, где они стоят в позиции  $B$ ,  $T^0(L_1)$  и  $T^0(L_2)$  — доски ноликов, поставленных ходами, принадлежащими веткам  $L_1$  и  $L_2$ , и  $T^\times(L_1)$  — доска крестиков, поставленных ходами из ветки  $L_1$ . Тогда

$$\text{Inf}(B, L_1, L_2) := [T^\times(L_1) \cap T^0(L_2)] \cup \cup \text{Pent}(T^0(B) \cup T^0(L_1) \cup T^0(L_2));$$

где  $\text{Pent}(T)$  — предикат, равный 1, если на доске  $T$  отмечена какая-либо пятерка полей, идущих подряд по горизонтали, вертикали и диагонали, и равный 0 в противном случае. Через этот предикат естественным образом определяются отношения влияния ветки на ветку и поддереву.

Мы не симметризовали рассмотренный выше предикат влияния и не добивались выполнения второй аксиомы о композиции веток. (Первая аксиома не нужна, так как мы обходимся без отношения влияния ветки на ход. Для любой ветки  $L$  четной длины из позиции  $\text{fin}(B, L)$  допустимы только такие ходы, которые можно сделать из позиции  $B$ .) Поэтому можно обойтись без теоремы о переносе оценки группы ходов и разложения псевдокритической ветки на компоненты. При доказательстве же теоремы о переносе оценки позиции (и аналогичном доказательстве теоремы о переносе оценки хода) упомянутые аксиомы не используются.

## § 5. Алгоритмы, основанные на использовании влияния

Все описанные ниже алгоритмы реализованы в шахматной программе «Каисса» и поэтому в этом параграфе речь будет идти только об игре в шахматы.

Первый алгоритм служит для отсеечения поддеревьев форсированной игры. Форсированную игру можно рас-

смаатривать как вспомогательный перебор из заключительной позиции некоторой модели, целью которого является динамическая оценка этой позиции, поскольку статическая оценка может быть недостоверной.

Так, позицию  $F$ , где ферзь цвета, противоположного  $\text{col } F$  находится под ударом, нельзя оценивать, не рассмотрев возможные последствия этого взятия. Поэтому для получения достоверной оценки проводится дополнительный перебор, в котором разрешены только взятия, шахи и ответы на шах. Такая модель в предыдущей главе была названа форсированной игрой.

Форсированные варианты рассматриваются во всех конечных позициях и почти всегда в близких позициях идентичны. Для форсированной игры и конструктивно определенного в предыдущем параграфе отношения влияния справедлива теорема о переносе оценки позиции (по существу, она доказана в § 2 этой главы, при этом не рассмотрены только ситуации, связанные с шахами). Пусть проведена форсированная игра из позиции  $B$  и оказалось, что она проигрывает. Тогда из позиций  $C = \text{fin}(B, L)$  с очередью хода цвета  $\text{col } B$  форсированная игра тоже проигрывает, если выполняются следующие условия:

ветка  $L$  не влияет на минимальное усеченное поддерево исследованной форсированной игры из позиции  $B$  цвета, противоположного  $\text{col } B$ ;

из позиции  $C = \text{fin}(B, L)$  нельзя сделать новых форсированных ходов.

Таким образом, во многих позициях можно не проводить форсированные варианты. Эффективность алгоритма, использующего результат теоремы о переносе оценки позиции, главным образом, зависит от удачного выбора позиции  $B$ . В этой позиции, не являющейся конечной, проводится тестовый форсированный вариант с той единственной целью, чтобы результат перебора применять в конечных позициях  $B$ -поддерева.

При выборе позиции  $B$  действуют противоречивые требования. С одной стороны, она должна находиться поближе к корню дерева, чтобы в ее поддереве было много заключительных позиций. С другой стороны, вероятность того, что ветки из позиции  $B$  в конечные позиции  $C$  влияют на тестовую форсированную игру из  $B$ , должна быть малой. Поэтому позиция  $B$  должна

быть поближе к конечным позициям, т. е. достаточно далеко от корня дерева. Кроме того, если окажется, что тестовая форсированная игра из позиции  $B$  не проигрывает, то время на его проведение было затрачено впустую.

В реализованном алгоритме при переборе на фиксированную глубину  $n$  тестовые форсированные игры проводятся из тех позиций  $(n-2)$ -го уровня, в которых статическая оценка была неудовлетворительна. Последнее обстоятельство увеличивает вероятность проигрыша форсированных вариантов из конечных позиций глубины  $n$ .

Глубина  $n-2$  — максимальная для тестовых модельных игр  $\mathfrak{E}_T(B)$ . Ветки  $L$  из позиции  $B$  в позиции  $C$ , где ее результаты используются, имеют длину  $d(L) = 2$ . Однако увеличение количества исследуемых тестовых модельных игр частично компенсируется другой возможностью отсечения веток основной модели. Если позиция  $B$  выиграна в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$  за свой цвет  $\text{col } B$ , то она выиграна и в основной модели. Таким образом, можно произвести шаг назад из позиции  $B$ , не исследуя тихие ходы из позиций  $B$ -поддерева основной модели.

Действительно, если из позиции  $D$ , возникающей после выигрывающего хода форсированной игры  $\Psi = (B, D)$  допустимы в основной модели тихие ходы, то в  $\mathfrak{E}_T(B)$  из нее допустим пустой ход  $m_\Phi$ . Так как он проигрывает, в позиции  $D$  соотношение материала в пользу цвета  $\text{col } B$ . После любого тихого хода  $\Theta = (D, F)$  из позиции  $D$  возникнет позиция  $F$  с тем же соотношением материала, заключительная в основной модели. Из нее рассматриваются только ходы форсированной игры, причем пустой ход  $m_\Phi$  допустим (иначе ход  $\Theta = (D, F)$  не был бы тихим) и выигрывает. Ходы форсированной игры из позиции  $D$  были исследованы в тестовой модельной игре  $\mathfrak{E}_T(B)$ . Они тоже ведут в позиции, из которых в основной модели рассматриваются только ходы форсированной игры. Последние исследованы в игре  $\mathfrak{E}_T(B)$ , и среди них найдем выигрывающие. Следовательно, позиция  $B$  выиграна за цвет  $\text{col } B$  в основной модели.

Основным недостатком этого алгоритма является неустойчивость: достаточно в позиции  $C$  появиться но-

вому форсированному ходу, как форсированный вариант приходится проводить заново. При этом алгоритм не распознает ситуации, когда возникающие ходы не имеют отношения к тестовой форсированной игре.

При внимательном рассмотрении форсированные игры оказываются не идентичными, а похожими, точнее говоря, существует множество фрагментов — поддеревьев ее дерева, таких, что почти в каждой позиции форсированная игра является объединением подмножества фрагментов. Однако для каждой позиции это подмножество может быть своим. Поэтому естественно проверять влияние пофрагментно.

Существует два разных алгоритма, использующих такие сокращения перебора. Второй из них теоретически обоснован. К нему мы вернемся позже. Начнем с алгоритма, работающего со справочной плохих ходов.

В каждый момент перебора справочная плохих ходов содержит фрагменты, приписанные к различным позициям текущей ветки. Фактически хранится ход, начинающий фрагмент, лучший ответ противника на этот ход, величина материального проигрыша, полученного в результате фрагмента, и доски фрагмента.

Материальным проигрышем плохого хода мы называем разность между материальной оценкой позиции  $A$  с точки зрения стороны цвета  $\text{col } A$  и материальной оценкой позиций, получаемых из  $A$  в результате выбора этого хода. Таким образом, если ход  $\Psi$  проигрывает легкую фигуру, то материальный проигрыш равен ее весу  $h_{\text{лф}}$ . Если в результате хода  $\Psi$  мы выиграем не больше пешки, то материальный проигрыш равен  $-h_{\text{п}}$ . Тем не менее ход  $\Psi$  может быть плохим, так как имеются основания стремиться к большему выигрышу. Все ходы фрагмента, кроме, может быть, начального, — форсированные. Тот факт, что фрагмент приписан к некоторой позиции текущей ветки, означает, что в этой позиции этот фрагмент протекал бы так же. Вовсе не обязательно, чтобы этот фрагмент был фактически проведен в этой позиции. Более того, как будет видно из дальнейшего, необязательно, чтобы фрагмент был вообще проведен хоть в какой-нибудь позиции, — он может быть собран из более мелких фрагментов, проводившихся в разных позициях. Верно лишь то,

что этот фрагмент собран из поддерева той позиции, к которой он приписан.

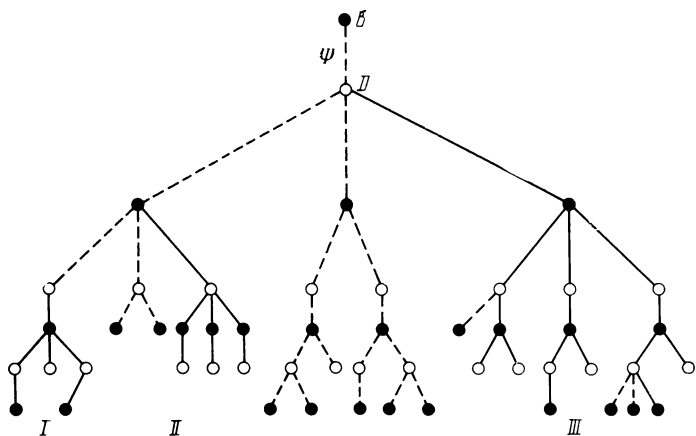
Среди фрагментов заметное место занимают фрагменты с пустым начальным ходом. Эти фрагменты описывают выигрывающие форсированные варианты. Необходимость таких фрагментов возникает при попытках собрать более крупный фрагмент из мелких. Однако эти фрагменты имеют и самостоятельный смысл. Будучи приписаны к вершине противоположного цвета, они показывают возможность форсированного выигрыша за ту сторону, чей ход, и поэтому называются угрозами.

Назовем фрагменты, описывающие угрозы, или, что то же самое, начинающиеся с пустого хода,  $k^0$ -угрозами, а остальные фрагменты  $l^0$ -плохими ходами. Цветом  $l^0$ -плохого хода называется цвет стороны, начинающей фрагмент. Цветом  $k^0$ -угрозы, естественно, называется цвет стороны, сделавшей пустой ход в фрагменте, т. е. «белая  $k^0$ -угроза» — это угроза белым.

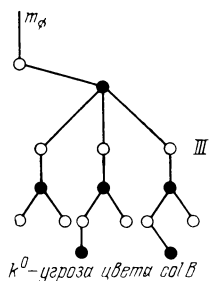
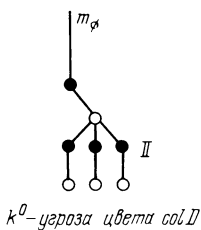
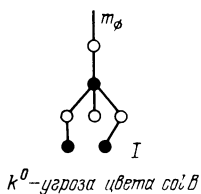
Приведенная в предыдущем параграфе формула, определяющая значения предиката влияния  $I(B, L_1, L_2)$ , может применяться для вычисления влияния друг на друга веток с началом в разных вершинах. Мы пользуемся этим и говорим о влиянии друг на друга веток и поддеревьев с началом в разных вершинах. Однако соображения о правомочности использования такого отношения влияния пока имеют лишь эвристический характер.

Позиция  $B$ , к которой приписан фрагмент, рассматривается как корень соответствующего поддерева игры. Однако фактически фрагмент мог быть образован при обходе поддерева с корнем в другой вершине. Он перенесен в позицию  $B$  вдоль ветки, на которую он не влияет. На рис. 34 показана часть дерева игры. Некоторые поддерева этой части выделены (они отличаются тем, что приводят к изменению соотношения материала). Эти поддерева и являются  $k^0$ -угрозами и  $l^0$ -плохими ходами, приписанными к позиции  $D$ . После обхода  $D$ -поддерева игры  $\mathcal{M}$  все они приписаны к позиции  $D$ . После шага назад из  $D$  некоторые из них в преобразованном виде будут приписаны к предыдущей позиции  $B$ .

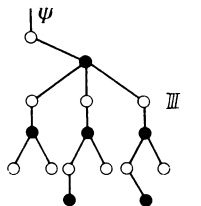
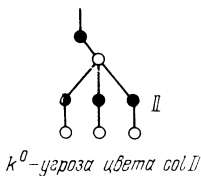
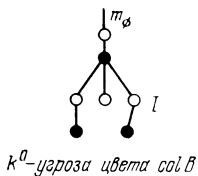
Алгоритм обхода состоит из шагов вперед и шагов назад. Мы рассмотрим сначала переработку фрагментов при шаге назад.



*D*-поддерево обхода и выделенные фрагменты



фрагменты, приписанные к позиции D



фрагменты, перенесенные к позиции B

Из некоторых фрагментов, приписанных к позиции  $D$ , формируются фрагменты, которые приписываются к позиции  $B$ . Другие фрагменты просто вычеркиваются из справочной. Пусть из позиции  $B$  в позицию  $D$  ведет ход  $\Psi = (B, D)$ . Мы поставим ему в соответствие две формально двухходовые ветки  $\lambda_1(\bar{B}; \Psi, m_\Phi)$  и  $\lambda_2(\bar{B}; m_\Phi, \Psi)$ . Началом первой является позиция  $B$ , началом второй — позиция  $\bar{B}$ , где фигуры стоят так же, как в позиции  $B$ , но очередь хода принадлежит противоположной стороне.

Мы проверяем, влияет ли каждая  $k^0$ -угроза на ветку  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  своего цвета: если цвет угрозы  $\text{col } k^0 = \text{col } \Psi$ , то влияет ли она на  $\lambda_1$ , в противном случае — влияет ли на  $\lambda_2$ . Если влияния нет, то проверяем еще, была ли она впервые получена на минимаксной части дерева обхода из позиции  $D$  (объединению минимальных  $b$ - и  $c$ -усеченных поддеревьев). Отрицательный ответ имеет место в двух случаях:  $\text{col } k^0 = \text{col } \Psi$  и  $\Psi$  — плохой ход или  $\text{col } k^0 \neq \text{col } \Psi$  и  $\Psi$  — закрывающий ход. В обоих случаях нужно запомнить, что угроза не взята с минимаксной части дерева обхода. Такие угрозы мы будем называть помеченными. Однажды помеченная угроза остается помеченной до тех пор, пока она не исключена из справочной.

Если  $k^0$ -угроза цвета  $\text{col } k^0 = \text{col } \Psi$  не влияет на ветку  $\lambda_1$  или  $k^0$ -угроза цвета  $\text{col } k^0 \neq \text{col } \Psi$  не влияет на ветку  $\lambda_2$ , то она приписывается к позиции  $B$ . Если же угроза влияет на соответствующую ветку, то мы поступаем по разному:  $k^0$ -угрозы цвета  $\text{col } k^0 \neq \text{col } \Psi$  и помеченные  $k^0$ -угрозы цвета  $\text{col } k^0 = \text{col } \Psi$  просто исключаются из справочной, а вместо помеченных  $k^0$ -угроз цвета  $\text{col } \Psi$  образуются  $l^0$ -плохие ходы, которые также приписываются к позиции  $B$ . Первый ход  $\Theta_0(l^0)$  нового  $l^0$ -плохого хода, лучший ответ противника  $\Theta_1(l^0)$ , материальный проигрыш  $\text{Mat}(l^0)$  и набор досок  $\{T_\gamma(l^0)\}$  определяются следующим образом:

$$\Theta_0(l^0) := \Psi;$$

$$\Theta_1(l^0) := \Theta_1(k^0);$$

$$\text{Mat}(l^0) := \text{Mat}(k^0) - h(\Psi);$$

$$\{T_\gamma(l^0)\} := \{T_\gamma(k^0)\} \cup \{T_\gamma(\lambda_1)\};$$

Здесь  $h(\Psi)$  — вес фигуры, взятой ходом  $\Psi$ .

Рассмотрим теперь переработку  $l^0$ -плохих ходов. Перед ее началом мы образуем набор пустых досок

так называемого сумматора, в котором потом образуются логические объединения досок некоторых из просмотренных  $l^0$ -плохих ходов, приписанных к позиции  $D$ . Для каждого  $l^0$ -плохого хода проверяется, влияет ли он на ветку  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  своего цвета. Если влияния нет, то  $l^0$ -плохой ход приписывается к позиции  $B$ , причем он помечается в тех же случаях, что и  $k^0$ -угроза.

Если  $l^0$ -плохой ход цвета  $\text{col } B$  влияет на ветку  $\lambda_1$ , то он исключается из справочной. Исключаются также  $l^0$ -плохие ходы цвета  $\text{col } l^0 \neq \text{col } \Psi$ , влияющие на ветку  $\lambda_2$ , когда ход  $\Psi$  — плохой. Доски остальных  $l^0$ -плохих ходов, влияющих на ветку  $\lambda_2$ , объединяются, т. е. каждый набор таких досок в свою очередь объединяется с набором досок сумматора. Кроме того, определяется минимум материальных проигрышей всех таких  $l^0$ -плохих ходов.

Теперь формируются фрагменты, приписанные к позиции  $B$ . Если ход  $\Psi$  — плохой, и какие-либо  $k^0$ -угрозы цвета  $\text{col } B$  повлияли на ветку  $\lambda_1$ , то образование соответствующего  $l^0$ -плохого хода уже было описано. Если же никакая из  $k^0$ -угроз не влияла на ветку  $\lambda_1$ , то формируется новый  $l^0$  плохой ход:

$$\begin{aligned}\Theta_0(l^0) &:= \Psi; \\ \Theta_1(l^0) &:= m_{\odot}; \\ \text{Mat}(l^0) &:= -h(\Psi); \\ \{T_{\gamma}(l^0)\} &:= \{T_{\gamma}(\lambda_1)\};\end{aligned}$$

Другой информации о новом  $l^0$ -плохом ходе у нас нет.

Если ход  $\Psi$  — закрывающий, то строится соответствующая  $k^0$ -угроза цвета, противоположного  $\text{col } \Psi = \text{col } B$ :

$$\begin{aligned}\Theta_0(k^0) &:= m_{\odot}; \\ \Theta_1(k^0) &:= \Psi; \\ \text{Mat}(k^0) &:= \min_{\text{col } l^0 \neq \text{col } \Psi, l^0 \not\sim \lambda_2} \text{Mat}(l^0) + h(\Psi); \\ \{T_{\gamma}(k^0)\} &:= \{T_{\Sigma}\};\end{aligned}$$

Здесь  $\{T_{\gamma}(k^0)\}$  — набор досок новой  $k^0$ -угрозы,  $\{T_{\Sigma}\}$  — набор досок сумматора. Сами влияющие  $l^0$ -плохие ходы исключаются из справочной.

Если же ход  $\Psi$  — улучшающий, то по описанным правилам строятся  $k^0$ -угроза и  $l^0$ -плохие ходы. Последних может быть несколько, так как на ветку  $\lambda_1$  может влиять не одна  $k^0$ -угроза.

При выполнении шага вперед построенная таким образом справочная используется для сокращения обхода из позиции  $D$ , куда произведен этот шаг. Однако это делается лишь в случае, когда из позиции  $D_0$  разрешены только ходы форсированной игры. Для каждой  $k^0$ -угрозы цвета  $\text{col } k^0 = \text{col } D$  проверяется:

влияет ли она на ветку, ведущую в позицию  $D$  из позиции  $B$ , к которой  $k^0$ -угроза приписана;  
выполняется ли неравенство

$$f_m(D) \underset{\text{col } D}{\leqslant} \text{Mat}(k^0) + m_m,$$

где  $f_m(D)$  — значение материальной оценочной функции для позиции  $D$ , а  $m_m$  — материальная часть грани соответствующего цвета ( $m_m = \lim_m$ , если в позиции  $D$  ход белых, иначе  $m_m = \overline{\lim}_m$ ).

Если есть какая-либо  $k^0$ -угроза цвета  $\text{col } B$  с достаточным материальным выигрышем, не влияющая на соответствующую ветку и нет  $k^0$ -угроз цвета, противоположного  $\text{col } B$ , то обход из позиции  $D$  не производится, а сразу делается шаг назад на том основании, что угроза заведомо реализуется. Таким образом, в данной позиции есть выигрывающий ход.

Справочная используется также для сокращения перебора при помощи отсечения отдельных ходов. После того, как порожден некоторый ход  $\Psi$  из позиции  $D$  и управляющий алгоритм предлагает выполнить его, проверяется, есть ли в справочной  $l^0$ -плохие ходы, содержащие информацию о ходе  $\Psi$ . Для каждого фрагмента с первым ходом  $\Theta_0(l^0) = \Psi$  проверяется, достаточен ли материальный проигрыш  $\text{Mat}(l^0)$  для отсечения, т. е. выполняется ли неравенство

$$f_m(D) \underset{\text{col } D}{\leqslant} \text{Mat}(l^0) + m_m.$$

Если материальный проигрыш достаточен, то проверяется, влияет ли  $l^0$ -плохой ход на ветку  $L(B, \dots, D)$ , ведущую из позиции  $B$ , к которой он приписан, в рас-

смаатриваемую позицию  $D$ . Если найдется хотя бы один  $l^0$ -плохой ход с первым ходом  $\Psi$  и с достаточным материальным проигрышем, не влияющий на соответствующую ветку, то исследование хода  $\Psi$  откладывается. При этом запоминается, какие именно  $l^0$ -плохие ходы вызвали откладывание.

Если же исследование хода  $\Psi$  не откладывается, то в справочную заносится фрагмент с первым ходом  $\Psi$ , приписанный к позиции  $D$ . Для такого фрагмента не строятся доски, но отмечается, что он служебный. Для хода  $\Psi$  из позиций  $D$ -поддерева обхода с очередью хода цвета  $\text{col } D$  мы сначала проверяем, существует ли такой фрагмент. В случае положительного ответа проверка влияния фрагментов с первым ходом  $\Psi$ , приписанных к выше лежащим позициям, не производится. Таким образом, не тратится времени на проверки с заранее известным результатом.

После того как в данной позиции закончен перебор неотложенных ходов, для каждого отложенного хода проверяется, влияют ли фрагменты, вызвавшие его откладывание, на минимаксное поддерево данной позиции. Ходы, у которых все фрагменты влияют на него, исследуются, а остальные снова откладываются. По окончании перебора допущенных ходов снова проверяется влияние фрагментов отложенных ходов на новое минимаксное поддерево и т. д.

Описанная процедура заканчивается в одном из двух случаев. Либо будут исследованы все ходы, либо в какой-то момент для каждого отложенного хода найдется фрагмент, вызвавший его откладывание и не влияющий на минимаксное поддерево данной позиции. В последнем случае все еще не исследованные ходы отсекаются.

Выше дано описание принципиальной схемы алгоритма, реализованного в шахматной программе. Некоторые важные детали опущены, другие для удобства понимания изложены не совсем так, как они реализованы в программе, поэтому приведенный выше текст не следует принимать за техническое описание алгоритма, тем более, что непрерывно ведется его доработка и оптимизация. В частности, в первом варианте алгоритма не было понятия  $k^0$ -угроз. Оно было введено позднее как вспомогательное для построения  $l^0$ -плохих ходов, но со временем стало одним из основных в алгоритме.

Кроме сокращения перебора, справочная  $l^0$ -плохих ходов используется для улучшения порядка перебора и выявления некоторых содержательных обстоятельств, относящихся к рассматриваемым позициям.

Основным недостатком рассмотренного выше алгоритма является частное возникновение ситуаций, в которых он теряет информацию.

Характерным примером является случай, когда  $k^0$ -угроза не связана с предыдущим ходом противника, но связана с предшествующим ему своим ходом. В таком случае построение соответствующей  $k^0$ -угрозы рассмотренным выше методом невозможно, так как выполнение такой угрозы требует двух ходов подряд одной и той же стороны, и определение того, остается ли эта угроза в силе, усложняется свободой в выборе противником промежуточного хода. С другой стороны, вынесение старой  $k^0$ -угрозы на верхний уровень не правомочно.

В качестве примера такой ситуации возьмем вилку конем на ферзя и ладью. На каждый ответ противника берется либо ферзь, либо ладья. Эти взятия являются  $k^0$ -угрозами, причем ход противника, предшествующий взятию, с ним не связан. Какую же информацию можно вынести на уровень позиции, из которой делался вилочный ход? Очевидно, что никаких  $k^0$ -угроз в ней не существует, так как сам вилочный ход не является форсированным и не связан с последующими ходами противника. С другой стороны, в чисто шахматном смысле этот ход является угрозой и вся информация для ее описания у нас есть. Такая угроза всего лишь не укладывается в схему алгоритма, описанного выше.

Введем понятие  $k^1$ -угрозы. Ход  $\Psi$  является  $k^1$ -угрозой, когда после него возникает некоторое множество  $k^0$ -угроз. Конструктивно  $k^1$ -угроза определяется как ход, непосредственно связанный хотя бы с одной  $k^0$ -угрозой. По такому определению любое нападение на фигуру является  $k^1$ -угрозой.

Тем не менее  $k^1$ -угроза может быть проигрывающим ходом, если у противника находится собственная  $k^0$ -угроза, связанная с ним. В этом случае он на общих основаниях содержится также и в справочной  $l^0$ -плохих ходов.

Структура информации, связанной с  $k^1$ -угрозой, следующая. Заголовок  $k^1$ -угрозы содержит, кроме всего того, что хранится о  $k^0$ -угрозе, также заголовки двух списков — списка своих  $k^0$ -угроз, вынесенных из основной справочной  $k^0$ -угроз (поскольку они не правомочны) в специальную запасную справочную, и списка опровержений — ходов противника, бывших лучшими ответами на  $k^1$ -угрозу.

Опровержения могут не быть  $k^0$ -угрозами, поскольку они чаще всего не форсированы. Однако они должны

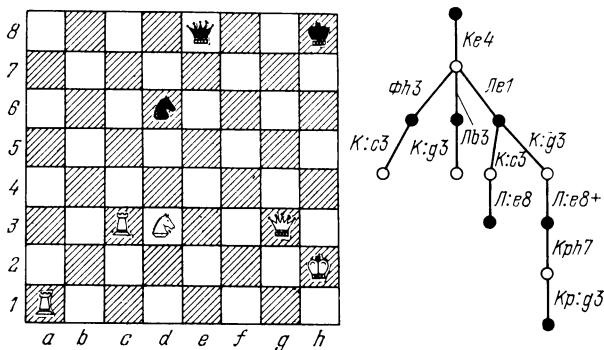


Рис. 35.

влиять на  $k^1$ -угрозу. Информация о каждом опровержении содержит список  $l^0$ -плохих ходов того же цвета, что  $k^1$ -угроза, и список  $k^0$ -угроз противоположной стороны.

Рассмотрим информацию, связанную с делающим вилку ходом, причем мы предположим, что конь может быть связан ладьей противника (см. рис. 35).

Ход  $Ke4$  —  $k^1$ -угроза, поскольку после него возникли в переборе  $k^0$ -угрозы  $K:c3$  и  $K:g3$ . Информация об этих  $k^0$ -угрозах содержится в специальном поле, недоступном для основного алгоритма, и собрана в список, заголовок которого содержится в элементе информации, описывающей ход  $Ke4$  как  $k^1$ -угрозу.

Список опровержений в данном случае состоит из одного хода  $Le1$ . Список  $l^0$ -плохих ходов, приписанных к этому опровержению, состоит из ходов  $K:c3$  и

$K : g3$  (этот список также содержится в запасной справочной). Список  $k^1$ -угроз в данном примере пуст.

Информация о  $k^1$ -угрозах используется в переборе следующим образом. Если делается некоторый ход  $\Psi$ , содержащийся в справочной  $k^1$ -угроз, то все приписанные к нему  $k^0$ -угрозы переносятся из запасной справочной в справочную  $k^0$ -угроз, где рассматриваются в дальнейшем на общем основании. Однако после шага назад, соответствующего ходу  $\Psi$ , эти  $k^0$ -угрозы исключаются из справочной без всяких проверок.

Если непосредственно после  $k^1$ -угрозы в переборе делается один из ходов, приписанных к этой угрозе как опровержение, то соответствующие  $l^0$ -плохие ходы и  $k^0$ -угрозы противника также переносятся в общие справочные  $l^0$ -плохих ходов и  $k^0$ -угроз.

Таким образом, программе не требуется заново искать и строить эти фрагменты. В результате не только сохраняется время, затрачиваемое на построение уже когда-то построенных, но потерянных элементов справочной, но и увеличивается мощность сокращения перебора. Так, в примере с вилкой алгоритм, не использующий информацию о  $k^1$ -угрозах, будет строить каждый раз после хода  $Ke4$  все дерево, изображенное на рис. 35, и терять информацию, полученную при его обходе, после шага назад, которому соответствует ход  $Ke4$ .

Конечно, при обходе дерева следует проверить, корректна ли по-прежнему информация о  $k^1$ -угрозе. Делается это на общих основаниях с помощью понятия влияния. При этом отдельно проверяются влияние самой  $k^1$ -угрозы, каждого из ее опровержений, каждого  $l^0$ -плохого хода и  $k^0$ -угрозы из запасной справочной. Таким образом, отдельные элементы списка  $l^0$ -плохих ходов и  $k^0$ -угроз могут вычеркиваться. Так же могут вычеркиваться опровержения вместе со всеми своими списками. Сама  $k^1$ -угроза вычеркивается не только тогда, когда текущий ход повлиял на нее, но также и тогда, когда список  $k^0$ -угроз оказался вследствие вычеркивания пустым.

В случае, когда на одном и том же уровне возникает несколько одинаковых  $k^1$ -угроз, все их списки редактируются и сливаются.

Структура  $k^1$ -угроз описывает, естественно, далеко не все ситуации, в которых требуется весьма тонкое обращение с  $k^0$ -угрозами. Однако, на наш взгляд, она

отражает некоторые понятия, связанные в различных играх с терминами «темп», «время». При внимательном рассмотрении получающихся алгоритмов видно, что угрозы являются трафаретами для беспереборной оценки деревьев горизонта 2 по определению Ботвинника. В модели активной игры  $k^1$ -угрозы и  $l^1$ -проигрывающие ходы можно использовать для сокращения деревьев форсированной игры при проверке ходов на активность и безопасность.

Можно попытаться построить алгоритмы, работающие с  $k^2$  и более сложными по порядку угрозами. Формально описать такие алгоритмы довольно просто. Однако для таких игр, как шахматы, они требуют слишком большого размера памяти, занятой соответствующими запасными справочными, а для более простых игр, по-видимому, достаточны и  $k^1$ -угрозы.

Второй алгоритм, использующий пофрагментное сокращение перебора, основан на понятии тестового коррелированного варианта (ТКВ). Сперва ТКВ строятся в начальной позиции перебора. Построение ТКВ происходит с помощью итеративного перебора. Выписываются все форсированные ходы в начальной позиции. Для каждого хода строится фрагмент, доски которого содержат в первый момент только доски самого хода. При рассмотрении какого-либо хода в перебор допускаются лишь те из выписанных сначала ходов, чьи фрагменты влияют на ветку, ведущую из начальной позиции варианта в данную. При этом запоминается, какие ходы были отсечены из-за отсутствия такого влияния. После рассмотрения какого-либо хода его фрагмент заполняется досками минимаксного дерева этого перебора. После рассмотрения всех ходов проверяется, какие из них необходимо пересмотреть. Это те ходы, фрагменты которых влияют на фрагменты ходов, отсеченных при первом рассмотрении, так как влияние указывает на возможность существенного изменения результата путем комбинирования. Ходы, выигравшие при переборе во время какой-либо итерации, тем не менее иногда не пересматриваются. В результате очередной итерации фрагменты проигрывающих ходов расширяются, поэтому может возникнуть необходимость неоднократного рассмотрения одного хода. Можно показать, что число таких итераций не превышает числа возможных в пози-

ции форсированных ходов. Однако такая оценка не противоречит тому, что по ходу итеративного перебора будет построено больше позиций, чем во время перебора без отсечений. Ведь многие позиции дерева итеративного перебора, которое само по себе заведомо меньше, обходятся по несколько раз.

Тем не менее даже первоначальная реализация алгоритма итеративного перебора, при которой итеративный перебор просто заменял обычный перебор форсированного варианта, сократила время работы программы на 10%.

При дальнейшей разработке этого алгоритма была организована справочная фрагментов ТКВ, которые подобно  $k^0$ -угрозам и  $l^0$ -плохим ходам переносились от позиции к позиции. В этом случае в качестве досок фрагмента нулевой итерации брались не доски одного начального хода, а доски фрагмента из справочной.

Если ветка, ведущая в данную позицию, из позиции, где проводился соответствующий ТКВ, не влияла на фрагмент ТКВ, то последний считается результатом не нулевой, а первой итерации, т. е. пересчет этого хода происходит только в случае влияния на его фрагмент фрагмента какого-либо другого хода.

Такое уточнение дало быструю сходимость итераций, привело к сокращению количества позиций в дереве обхода в 4—5 раз.

## ГЛАВА 4

# ИГРОВОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### § 1. Вероятностные модели игры двух противников

Во второй главе мы рассмотрели пример вероятностной модели игры двух противников, для которой с увеличением глубины перебора растет вероятность правильного определения оценки начальной позиции. Полученные результаты имеют качественный характер, так как при их доказательстве были использованы предположения о независимости значений оценочной функции  $f(A)$  для разных позиций  $A$ , справедливость которых не ясна. Одно из этих предположений не выполняется: значения оценочной функции  $f(B)$  для позиции  $B$ , возникающей после хода  $\Psi = (A, B)$  из позиции  $A$ , зависят от значения  $f(A)$ . Однако примененный нами способ рекуррентного определения вероятности истинности модельных оценок из значений оценочной функции  $f(D)$  для позиций  $D$  ранга  $r(D) = n$  можно применять в значительно более общих предположениях.

Мы будем считать, что вероятностные характеристики позиций  $A$  рассматриваемой игры  $\mathfrak{A}$  определяются набором параметров

$$\chi(A) = \chi(t_1(A), t_2(A), \dots, t_k(A)).$$

Параметры  $t_1, t_2, \dots, t_h$  ( $h \leq k$ ) связаны с оценками позиции  $A$  и позиций, из которых идет ветка в позицию  $B$  или в которые ведет ветка из нее, значениями оценочной функции  $f(B)$  в рассматриваемых позициях и очередью хода в позиции  $A$ . Параметры  $t_{h+1}, \dots, t_k$  имеют

характер, не связанный с очередью хода. Таковы, например, ожидаемое количество ходов из позиции  $A$ , острота последней, связанная с ожидаемым отклонением значения оценочной функции  $f(A)$  от истинной оценки и т. д. Симметричность вероятностных характеристик для позиций с очередью хода белых и черных состоит в том, что при замене значений параметров первой группы, куда входят и очередь хода в позиции  $A$ , с  $t_i$  на  $1 - t_i$  вероятностные характеристики не меняются:

$$\begin{aligned}\chi(1 - t_1, 1 - t_2, \dots, 1 - t_h, t_{h+1}, \dots, t_k) = \\ = \chi(t_1, t_2, \dots, t_h, t_{h+1}, \dots, t_k).\end{aligned}$$

Среди параметров, от которых зависят эти характеристики, мы выделим очередь хода  $\text{col } A$ , причем для позиций с ходом белых  $\text{col } A = 0$ , а для позиций с ходом черных  $\text{col } A = 1$ . Кроме того, мы выделим истинную оценку  $\text{oc}(A)$  позиции  $A$  и значение оценочной функции  $f(A)$ . Другие параметры  $t_4, \dots, t_h$ , меняющие значения в формуле симметричности так же, как  $\text{col } A$ , составляют вектор  $\mathbf{q}$ , а параметры  $t_{h+1}, \dots, t_k$  — вектор  $\mathbf{r}$ . Симметричный вектор с координатами  $1 - t_4, \dots, 1 - t_h$  мы обозначим  $\mathbf{1} - \mathbf{q}$ . Пользуясь симметрией, мы исключим из явных параметров цвет очереди хода и будем считать, что все рассматриваемые характеристики относятся к позициям с ходом белых. Как обычно, мы будем рассматривать игру  $\mathcal{M}$ , в которой белые и черные ходят по очереди.

Пусть рассматривается модель Шеннона или другая модель, определение которой зависит от значения параметра глубины  $n$ . Оценку начальной позиции  $A$  в этой модели мы обозначим  $\text{moc}_n(A)$ . Если в позиции  $A$  ход белых,  $\text{oc}(A) = x$ ,  $f(A) = y$ , а остальные параметры, определяющие вероятностные характеристики, равны  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$ , то мы введем обозначения  $P_-(x, y, z, \mathbf{q}, \mathbf{r}, n)$  и  $P_+(x, y, z, \mathbf{q}, \mathbf{r}, n)$  для вероятностей выполнения неравенств  $\text{moc}_n(A) < z$  или  $\text{moc}_n(A) \leq z$  соответственно:

$$\begin{aligned}P_-(x, y, z, \mathbf{q}, \mathbf{r}, n) &:= P(\text{moc}_n(A) < z \mid \text{col } A = \\ &= 0, \text{oc}(A) = x, f(A) = y, \mathbf{q}(A) = \mathbf{q}, \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}); \\ P_+(x, y, z, \mathbf{q}, \mathbf{r}, n) &:= P(\text{moc}_n(A) \leq z \mid \text{col } A = \\ &= 0, \text{oc}(A) = x, f(A) = y, \mathbf{q}(A) = \mathbf{q}, \mathbf{r}(A) = \mathbf{r});\end{aligned}$$

Неравенство  $\text{моц}_n(A) < z (\leq z)$  выполняется тогда и только тогда, когда все позиции  $B_i$  после ходов  $\Psi_i = (A, B_i)$  из позиции  $A$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) получают в соответствующих моделях глубины  $n-1$  оценки  $< z (\leq z)$ . При выполнении неравенств  $\text{моц}_n(A) < z$  или  $\text{моц}_n(A) \leq z$  справедливы многие аналогичные соотношения. В дальнейшем мы будем объединять их, используя символы альтернативного неравенства типа  $\leq$  (не больше или меньше).

Однако, так как в позициях  $B_i$  ход черных, характеристики для них будут определяться значением соответствующего параметра  $1-z$  (мы считаем, что минимальное значение оценок и оценочной функции равно нулю, а максимальное — единице).

Предположим, что для данной глубины  $n$  функции  $P_-(x, y, z, q, r, n)$  и  $P_+(x, y, z, q, r, n)$  удовлетворяют условиям симметрии

$$P_-(x, y, z, q, r, n) = P(\text{моц}_n(A) > 1-z \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 1-x, f(A) = 1-y, q(A) = 1-q, r(A) = r),$$

$$P_+(x, y, z, q, r, n) = P(\text{моц}_n(A) \geq 1-z \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 1-x, f(A) = 1-y, q(A) = 1-q, r(A) = r).$$

Для модели Шеннона глубины  $n=0$  условия симметрии выполняются. Действительно, для нее  $\text{моц}_0(A) = f(A)$ . Следовательно, вероятности иметь заданные значения модельной оценки  $\text{моц}_0(A)$  не зависят ни от каких параметров, кроме  $f(A)$ , и выполняются условия:

$$P(\text{моц}_0(A) \leq z \mid f(A) = y) = \begin{cases} 1, & \text{когда } y \leq z, \\ 0, & \text{когда } y \geq z, \end{cases}$$

$$P(\text{моц}_0(A) \geq 1-z \mid f(A) = 1-y) = \begin{cases} 1, & \text{когда } 1-y \geq 1-z, \\ & \text{т. е. } y \leq z, \\ 0, & \text{когда } 1-y \leq 1-z, \\ & \text{т. е. } y \geq z. \end{cases}$$

Это значит, что модельные оценки  $\text{моц}_n(B_i)$  позиций  $B_i$ , возникающих после ходов  $\Psi_i = (A, B_i)$  из позиции

$A (i = 1, 2, \dots, m)$ , являются случайными величинами, зависящими только от параметров оц  $(B_i) = \xi_i, f(B_i) = \eta_i, q(B_i) = \gamma_i; r(B_i) = \rho_i$  и независимыми между собой. Следовательно, вероятности сложных событий

$$P\left(\left\{\text{моц}_n(B) \geq \xi_i\right\}_1^m, \text{col } A = 0, M(A) = \{\Psi_i = (A, B_i) \text{ оц } (B_i) = \xi_i, f(B_i) = \eta_i, q(B_i) = \gamma_i, r(B_i) = \rho_i\}_1^m\right)$$

равны произведению вероятностей компонент

$$\prod_{i=1}^m P_{\pm}(1 - \xi_i, 1 - \eta_i, 1 - \zeta_i, 1 - \gamma_i, \rho_i, n)$$

(в этой формуле учтено, что в позиции  $B_i$  ход черных, и использованы условия симметрии).

Используя эти предположения и легко доказываемые условия

$$P(\text{моц}_n(B) \leq \xi, \text{col } B = 1, \text{оц } (B) = \xi, f(B) = \eta, q(B) = \gamma, r(B) = \rho, n) = 1 - P_{\mp}(1 - \xi, 1 - \eta, 1 - \zeta, 1 - \gamma, \rho, n),$$

можно доказать рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} P_{\pm}(x, y, z, q, r, n+1) = \\ = \pi_{\pm}(x, y, z, q, r) + \sum_{m=1}^M p(x, y, z, q, r, m) \times \\ \times \int \prod_{i=1}^m (1 - p_{\mp}(1 - \xi_i, 1 - \eta_i, 1 - z, 1 - \gamma_i, \rho_i, n)) \times \\ \times d\Sigma(x, y, q, r, m; \{\xi_i, \eta_i, \gamma_i, \rho_i\}_1^m). \end{aligned}$$

Здесь  $\pi_{\pm}(x, y, z, q, r)$  — вероятности для позиций  $A$  с ходом белых оказаться заключительными с оценками  $\leq$  или  $< z$ , если оц  $(A) = x, f(A) = y, q(A) = q, r(A) = r$ :

$$\pi_{\pm}(x, y, z, q, r) = \begin{cases} \pi(x, y, q, r), & \text{когда } x \leq z, \\ 0, & \text{когда } x \geq z; \end{cases}$$

$p(x, y, q, r, m)$  — вероятности того, что из позиции  $A$  с ходом белых можно сделать  $m$  ходов  $\Psi_i = (A, B_i)$ , если оц  $(A) = x, f(A) = y, q(A) = q, r(A) = r$ ;  $M$  — максимальное количество ходов из позиций рассматриваемой игры  $\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{P}_m - k \times m$ -мерное пространство параметров — прямое произведение  $m$   $k$ -мерных пространств па-

раметров, определяющих вероятностные характеристики позиций:

$$\mathfrak{P}_m = \bigotimes_{i=1}^m (X \odot Y \odot Q \otimes R),$$

где  $X$  — множество возможных значений  $\text{оц}(A)$ ,  $Y$  — множество значений  $f(A)$ ,  $Q$  и  $R$  — множества возможных значений параметров  $q$  и  $r$ .  $\Sigma(x, y, q, r, m; \Omega)$  — вполне аддитивная функция множеств  $\Omega \subset \mathfrak{P}_m$ , равная условной вероятности того, что набор параметров  $\{\text{оц}(B_i) = \xi_i, f(B_i) = \eta_i, q(B_i) = \gamma_i, r(B_i) = \rho_i\}_{i=1}^m$  определяет точку пространства  $\mathfrak{P}_m$ , принадлежащую множеству  $\Omega$ , если в позиции  $A$  ход белых,  $\text{оц}(A) = x$ ,  $f(A) = y$ ,  $q(A) = q$ ,  $r(A) = r$  и количество допустимых по правилам игры  $\mathfrak{A}$  ходов  $\Psi_i = (A, B_i)$  равно  $m$ .

Из рекуррентной формулы следует, что, когда вероятности  $P_+(x, y, z, q, r, n)$  и характеристики  $\pi(x, y, q, r)$ ,  $p(x, y, q, r, m)$  и  $\Sigma(x, y, q, r, m; \Omega)$  удовлетворяют условиям симметрии, вероятности  $P_+(x, y, z, q, r, n+1)$  тоже им удовлетворяют. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые более или менее простые вероятностные модели, определяемые конкретным видом вероятностных характеристик, и обсудим вопросы об отношении этих моделей к реальным играм и конструируемым для них оценочным функциям. В основном мы будем считать, что игра  $\mathfrak{A}$  — совершенно равномерная (т. е. количество ходов  $m$  в любой незаключительной позиции  $A$  одинаково) и все заключительные позиции имеют весьма большой ранг  $N \gg n$  (следовательно,  $\pi(x, y, q, r) = 0$ ).

Обычно мы будем считать, что оценки рассматриваемых позиций принимают только два значения — 1 и 0. К такому случаю можно свести исследования, когда существуют промежуточные оценки. Если мы хотим выяснить, могут ли, например, белые достичь оценки  $z$ , то заменим  $\text{оц}(A)$ , определенные в исследуемой игре  $\mathfrak{A}$ , пороговой оценкой

$$\text{оц}_z(A) := \begin{cases} 1, & \text{если } \text{оц}(A) \geq z; \\ 0, & \text{если } \text{оц}(A) < z. \end{cases}$$

Когда оценочная функция  $f(A)$  может принимать любые значения между 0 и 1 и функции  $P_+(x, y, z, q, r, n)$

и  $P_-(x, y, z, q, r, n)$  совпадают, мы будем применять обозначение  $P(x, y, z, q, r, n)$ :

$$P(x, y, z, q, r, n) = \\ = P(\text{моц}_n(A) \leq z \mid \text{col } A = 0, \text{ оц}(A) = x, \\ f(A) = y, q(A) = q, r(A) = r) = P(\text{моц}_n(A) < z \mid \text{col } A = 0, \\ \text{оц}(A) = x, f(A) \leq y, q(A) = q, r(A) = r).$$

Вернемся к модели, рассмотренной во второй главе. В ней оценочная функция  $f(A)$ , как и истинная оценка  $\text{оц}(A)$ , принимает значение 0 и 1, а вероятностные характеристики позиций  $A$  зависят только от очереди хода  $\text{col } A$  и истинной оценки  $\text{оц}(A)$ . Если еще игра  $\mathfrak{A}$  — совершенно равномерная с  $m$  ходами в незаключительных позициях, и в каждой позиции  $A$ , незаключительной и выигранной за ту сторону, которой в ней принадлежит очередь хода, есть ровно  $s$  выигрывающих ходов, то общая рекуррентная формула превращается в рассмотренную во 2-й главе:

$$P_+(1, 0, n+1) = 1 - P_{n+1} = \\ = (1 - P_+(0, 0, n))^s (1 - P_+(1, 0, n))^{m-s} = Q_n^s P_n^{m-s}, \\ P_+(0, 0, n+1) = 1 - Q_{n+1} = (1 - P_+(1, 0, n))^m = P_n^m.$$

По этим формулам можно найти вероятность  $P_n$  того, что модельные оценки  $\text{моц}_n(A)$  позиций, выигранных за свой ход, правильны, и вероятность  $Q_n$  ошибочности модельных оценок позиций  $A$ , проигранных за свой ход. Должны быть только известны вероятности значений оценочной функции  $f(A)$ :

$$P_0 = p = P(f(A) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{ оц}(A) = 1), \\ Q_0 = q = P(f(A) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{ оц}(A) = 0).$$

Согласно нашим общим предположениям эти вероятностные характеристики удовлетворяют условиям симметрии:

$$p = P(f(A) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{ оц}(A) = 0), \\ q = P(f(A) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{ оц}(A) = 1).$$

В области возможных значений  $P_n$  и  $Q_n$  ( $0 \leq P_n \leq 1$ ,  $0 \leq Q_n \leq 1$ ) имеются три стационарные точки — решения системы уравнений

$$1 - P = Q^s P^{m-s}, \\ 1 - Q = P^m.$$

Одна из них  $R_1(1, 0)$  соответствует случаю, когда значения оценочной функции  $f(A)$  совпадают с истинными оценками  $oc(A)$ . Другая  $R_2(P_2, P_2)$  расположена на диагонали  $P=Q$ . Ее координаты  $P_2$  равны решению уравнения  $1 - P = P^m$ , расположенному внутри отрезка  $(0, 1)$ . Приблизительно они равны  $1 - \frac{\ln m}{m}$ . Для третьей

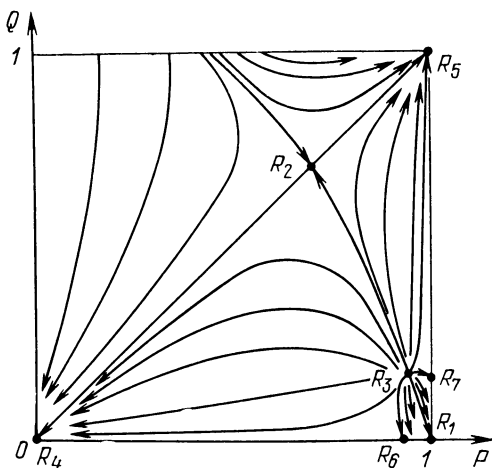


Рис. 36.

стационарной точки  $R_3(P_3, Q_3)$  координаты приблизительно равны  $P_3 \approx 1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{s}{s-1}}$ ,  $Q_3 \approx \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{s-1}}$ . Есть еще две пары точек, переходящих друг в друга:  $R_4(0, 0)$ ,  $R_5(1, 1)$  и  $R_6(P_6, 0)$ ,  $R_7(1, Q_7)$ , где  $P_6 \approx 1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{s}{s-1}}$ ,  $Q_7 \approx \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{s-1}}$ .

Через точки  $R_1, R_3, R_2$  проходит линия, разделяющая интересующий нас квадрат в плоскости  $PQ$  (фактически нас интересует более узкая область, где  $0 \leq P \leq 1$ ,  $0 \leq Q \leq P$ ) на левую нижнюю и правую верхнюю части (см. рис. 36). Точка  $S_n(P_n, Q_n)$  из одной части переходит в точку  $S_{n+1}(P_{n+1} = 1 - Q_n^{m-s}, Q_{n+1} = 1 - P_n^m)$

из второй. Поэтому стрелками на рис. 36 обозначены направления, куда передвигаются точки  $S_n(P_n, Q_n)$  при увеличении глубины  $n$  на 2. Стационарная точка  $R_1$  является устойчивой. Вблизи нее расположена область удовлетворительных значений вероятностных характеристик  $p$  и  $q$ . При таких значениях с увеличением глубины обхода  $n$   $P_n \rightarrow 1$ , а  $Q_n \rightarrow 0$ . Устойчивой является также стационарная пара точек  $R_4, R_5$ . К ним приближаются точки  $S_n(P_n, Q_n)$ , когда начальные значения  $P_0 = p, Q_0 = q$  не лежат в области удовлетворительных значений. Остальные стационарные точки и пары точек неустойчивы.

Мы остановились столь подробно на этой простой вероятностной модели не потому, что она интересна сама по себе. Другие модели, по-видимому, лучше отражающие реальное положение при программировании игр, содержат большее количество параметров и сложнее для исследования. Однако в некоторых случаях с увеличением глубины модели  $n$  вероятностные характеристики позиций  $A$  с различными значениями параметров  $y, q$  и  $r$  «выравниваются» и начинают изменяться аналогично тому, как они изменяются для рассматриваемой модели, в которой эти характеристики не зависят от  $y(A), q(A)$  и  $r(A)$ .

Пусть теперь оценочная функция  $f(A)$  принимает любые значения между 0 и 1, но их вероятности зависят только от очереди хода  $\text{col}(A)$  и истинной оценки  $\text{oc}(A)$ :

$$\begin{aligned} p_{\perp}(z) &:= P(f(A) \leq z \mid \text{col } A = 0, \text{oc}(A) = 1) = \\ &= P(f(A) \geq 1 - z \mid \text{col } A = 1, \text{oc}(A) = 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\perp}(z) &:= P(f(A) \leq z \mid \text{col } A = 0, \text{oc}(A) = 0) = \\ &= P(f(A) \geq 1 - z \mid \text{col } A = 1, \text{oc}(A) = 1); \end{aligned}$$

Тогда, по существу, мало что меняется. Когда игра  $\mathfrak{A}$  — совершенно равномерная с  $m$  ходами из незаключительных позиций, и из каждой выигранной за цвет своей очереди хода позиции  $A$  есть ровно  $s$  выигрывающих ходов, общая рекуррентная формула

принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_{\pm}(1, z, n+1) &= \\
 &= \prod_{i=1}^s (1 - P_{\mp}(0, 1-z, n)) \cdot \prod_{i=s+1}^m (1 - P_{\mp}(1, 1-z, n)) = \\
 &= (1 - P_{\mp}(0, 1-z, n))^s (1 - P_{\mp}(1, 1-z, n))^{m-s}, \\
 P_{\pm}(0, z, n+1) &= \prod_{i=1}^m (1 - P_{\mp}(1, 1-z, n)) = \\
 &= (1 - P_{\mp}(1, 1-z, n))^m.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 P_n(z) &:= \begin{cases} 1 - P_{\pm}(1, z, n), & \text{если } n \text{ четно;} \\ 1 - P_{\mp}(1, 1-z, n), & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases} \\
 Q_n(z) &:= \begin{cases} 1 - P_{\pm}(0, z, n), & \text{если } n \text{ четно;} \\ 1 - P_{\mp}(0, 1-z, n), & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}
 \end{aligned}$$

В них приведенная выше рекуррентная формула совпадает с формулой для ранее рассмотренной модели с двумя значениями оценочной функции  $f(A)$ :

$$\begin{aligned}
 1 - P_{n+1}(z) &= Q_n^s(z) P_n^{m-s}(z), \\
 1 - Q_{n+1}(z) &= P_n^m(z),
 \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
 P_0(z) &= 1 - p_{+}(z), \\
 Q_0(z) &= 1 - q_{+}(z).
 \end{aligned}$$

Пусть функции  $p_{\pm}(z)$  и  $q_{\pm}(z)$  строго монотонны, непрерывны и дифференцируемы (такими можно аппроксимировать любые функции  $p_{\pm}(z) = P(f(A) \leq z \mid \text{col } A = 0, \text{ оц}(A) = 1)$  и  $q_{\pm}(z) = P(f(A) \leq z \mid \text{col } A = 0, \text{ оц}(A) = 0)$ ). Тогда  $p_{+}(z) = p_{-}(z)$ ,  $q_{+}(z) = q_{-}(z)$ , эти функции на отрезке  $[0, 1]$  изменяются от 0 до 1, а функции  $P_0(z)$  и  $Q_0(z)$  монотонно убывают, непрерывны, дифференцируемы и на отрезке  $[0, 1]$  изменяются от 1 до 0. Если оценочная функция  $f(A)$  «имеет отношение к делу», то при  $0 < z < 1$  выполняется неравенство  $P_0(z) > Q_0(z)$ . Функции  $P_0(z)$ ,  $Q_0(z)$  определяют отрезок линии, заданной параметрически и расположенной в квадрате

$0 \leq P \leq 1$ ,  $0 \leq Q \leq 1$  плоскости  $PQ$  (см. рис. 37). Точнее, она лежит в треугольнике  $0 \leq P \leq 1$ ,  $0 \leq Q \leq P$ , соединяет точки  $O(0, 0)$  и  $I(1, 1)$  и является графиком монотонно возрастающей непрерывной и дифференцируемой функции  $Q = \varphi(P)$  (в некоторых точках ее производная может быть равна  $+\infty$ ).

Аналогичными свойствами обладают линии, заданные параметрически функциями  $P_n(z)$  и  $Q_n(z)$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Действительно, если  $P_{n-1}(z)$  и  $Q_{n-1}(z)$  непрерывны, дифференцируемы и монотонно убывают или возрастают, изменяясь на отрезке  $0 \leq z \leq 1$  от 1 до 0 (от 0 до 1), то функции  $P_n(z) = 1 - Q_{n-1}^s(z) P_{n-1}^{m-s}(z)$  и  $Q_n(z) = 1 - P_{n-1}^m(z)$  тоже непрерывны и дифференцируемы, монотонно возрастают, когда  $P_{n-1}(z)$  и

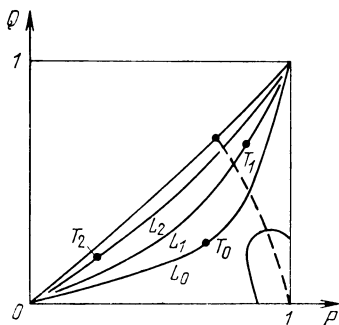
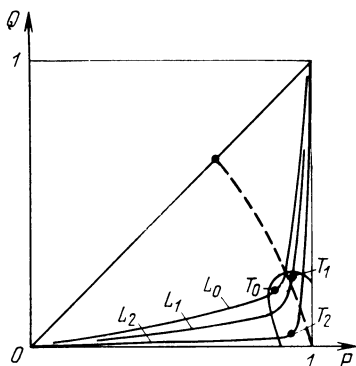
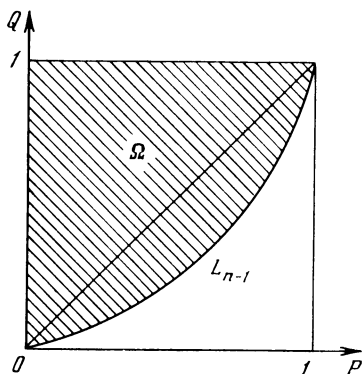


Рис. 37.

Рис. 38.

$Q_{n-1}(z)$  монотонно убывают, и убывают, когда  $P_{n-1}(z)$  и  $Q_{n-1}(z)$  возрастают, изменяясь на отрезке  $0 \leq z \leq 1$  от 0 до 1 (от 1 до 0). Кроме того, при  $0 < z < 1$

$$P_n(z) = 1 - Q_{n-1}^s(z) P_{n-1}^{m-s}(z) > 1 - P_{n-1}^s(z) P_{n-1}^{m-s}(z) = \\ = 1 - P_{n-1}^m(z) = Q_n(z).$$

Определим теперь вероятность выбрать выигрывающий ход из позиции  $A$  с ходом белых и оценкой 1 или с ходом черных и оценкой 0, рассмотрев модель исследуемой игры глубины  $n$  и определив лучший ход для нее по формуле Цермело. Пусть из позиции  $A$  возможны ходы  $\Psi_i = (A, B_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), из которых  $s$  выигрывают, а остальные проигрывают. Позиция  $B_i$ , возникающая после выигрывающего хода  $\Psi_i = (A, B_i)$  с вероятностью  $|Q'_{n-1}(z)| dz$  имеет оценку  $\text{моц}_n(B_i) = z$  (эта позиция проиграна за свой цвет  $\text{col } B_i$ ). Оценка позиции  $B_i$ , равная  $z$ , максимальна среди оценок всех позиций  $B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) с вероятностью  $Q_{n-1}^{s-1}(z) P_{n-1}^{m-s}(z)$  (во всех позициях  $B_j$  очередь хода принадлежит цвету, противоположному  $\text{col } A$ , значит,  $\text{моц}_{n-1}(B_j)$  должны быть не менее благоприятны для цвета  $\text{col } B_j = \text{col } B_i$ , чем  $\text{моц}_{n-1}(B_i) = z$ ). Таким образом, вероятность выбора одного из  $s$  выигрывающих ходов равна

$$\pi_n = s \int_0^1 Q_{n-1}^{s-1}(z) P_{n-1}^m(z) |Q'_{n-1}(z)| dz.$$

Функции  $P_{n-1}(z)$  и  $Q_{n-1}(z)$  определяют линию  $L_{n-1} \{P_{n-1}(z), Q_{n-1}(z)\}_0^1$ , и

$$\pi_n = s \int_{L_{n-1}} Q_{n-1}^{s-1} P_{n-1}^{m-s} dQ = s(m-s) \int_{\Omega} Q_{n-1}^{s-1} P_{n-1}^{m-s-1} dP dQ,$$

где линия  $L_{n-1}$  и область  $\Omega$  изображены на рис. 38. Если на линии  $L_0$  имеется точка  $R_0$ , лежащая в области устойчивости, изображенной на рис. 36 и 38, то на линиях  $L_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеются точки  $R_n$ , стремящиеся к точке  $R_\infty(1, 0)$ . Области интегрирования  $\Omega_n$  приближаются к квадрату  $0 \leq P \leq 1, 0 \leq Q \leq 1$ . Следовательно, в таком случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = s(m-s) \int_0^1 \int_0^1 P^{m-s-1} Q^{s-1} dP dQ = 1.$$

Если же линия  $L_0$  целиком лежит вне области устойчивости, то линии  $L_n$  приближаются к диагонали этого квадрата (строгое доказательство производится методами теории динамических систем в плоской области и здесь опущено). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = s(m-s) \int_0^1 \int_0^P P^{m-s-1} Q^{s-1} dP dQ = \frac{s}{m}.$$

В табл. 4 приведены значения  $P_n(z)$  и  $Q_n(z)$  для некоторых  $z$  и вероятности правильно определить выигрывающий ход, когда  $m=10$ ,  $s=2$ ,  $n=0, 2, 4, 6, 8$ , а функции  $P_0(z)$  и  $Q_0(z)$  равны соответственно  $1-z^4$  и  $1-z\sqrt{z}$ ,  $1-z^4$  и  $1-\sqrt{z}$ ,  $1-z^8$  и  $1-\sqrt[3]{z}$  \*).

Рассмотрим теперь некоторые модели, в которых значения оценочной функции  $f(B)$  в позиции  $B$  после хода  $\Psi=(A, B)$  из позиции  $A$  зависят от значения  $f(A)$  оценочной функции в позиции  $A$ , из которой делается ход  $\Psi$ . Для простоты мы по-прежнему будем считать, что рассматривается совершенно равномерная игра  $\mathfrak{A}_{m, N}$  с  $s$  выигрывающими ходами из каждой незаключительной выигранной за свой цвет  $\text{col } A$  позиции  $A$  и глубиной  $N$ , значительно большей, чем глубина  $n$  рассматриваемых моделей. Сравнительно легко получить аналогичные формулы, когда заданы функции распределения значений  $m$  и  $s$  — количеств соответственно всех и выигрывающих ходов из рассматриваемых позиций.

Если оценочная функция  $f(B)$ , как и истинная оценка  $\text{oc}(B)$ , принимает только значения 0 и 1, и ее вероятностные характеристики зависят только от цвета очереди хода  $\text{col } B$ , оценки  $\text{oc}(B)$ , оценки позиции  $A$ , из которой был произведен ход  $\Psi=(A, B)$  в нее, значения оценочной функции  $f(A)$  в этой позиции и удовлетворяют условиям симметрии, то они определяются шестью параметрами:

$$\begin{aligned} p(x_0, x, y) &:= P(f(B) = |1 - \text{col } A| \text{ oc}(A) = \\ &= |x_0 - \text{col } A|, \text{ oc}(B) = |x_1 - \text{col } A|, f(A) = |y - \text{col } A|); \end{aligned}$$

---

\*) Исследование вероятностей выбора выигрывающего хода для рассматриваемой модели и расчеты, приведенные в этом параграфе, выполнены В. П. Акимовым.

Вероятности правильных модельных оценок для модельных игр Шеннона при оценочной функции  $f(A)$ , принимающей промежуточные значения

## Обозначения

$m$  — количество всех ходов из незаключительных позиций,

$s$  — количество выигрывающих ходов из выигранных незаключительных позиций,

$n$  — глубина модели,

$P_n(x)$  — вероятность модельных оценок  $\text{моц}_i(A) \leq x$  для выигранных в исходной игре позиций,

$Q_n(x)$  — вероятность модельных оценок  $\text{моц}_n(A) \leq x$  для проигранных в исходной игре позиций,

$R_n$  — вероятность правильного выбора лучшего хода

$m = 10, \quad s = 2$					
$P_0(x) = x^4, \quad Q_0(x) = x \sqrt{x}$					
Глубина просмотра $n$	$P_n(0,57)$	$Q_n(0,57)$	$P_n(0,58)$	$Q_n(0,58)$	$R_n$
0	0,1056	0,4303	0,1132	0,4414	0,4173
2	0,1444	0,2402	0,1770	0,2809	0,2618
4	0,1462	0,1631	0,2923	0,3158	0,2264
6	0,1082	0,1104	0,7385	0,4716	0,2259
8	0,0221	0,0222	0,9999	0,9999	0,2063
$P_0(x) = x^4, \quad Q_0(x) = \sqrt{x}$					
Глубина просмотра $n$	$P_n(0,47)$	$Q_n(0,47)$	$P_n(0,48)$	$Q_n(0,48)$	$R_n$
0	0,0488	0,6856	0,0531	0,6928	0,7867
2	0,0895	0,5038	0,1068	0,5330	0,5137
4	0,1378	0,2906	0,2186	0,3966	0,2820
6	0,1572	0,1885	0,5529	0,5950	0,2144
8	0,1548	0,1598	0,9973	0,9974	0,2010
$P_0(x) = x^8, \quad Q_0(x) = \sqrt[8]{x}$					
Глубина просмотра $n$	$P_n(0,42)$	$Q_n(0,42)$	$P_n(0,43)$	$Q_n(0,43)$	$R_n$
0	0,0000096	0,8972	0,00967	0,9301	0,9941
2	0,000008	0,9000	0,00827	0,9557	0,9982
4	0,00000007	0,9045	0,00626	0,9818	0,9998
6	0	0,9124	0,00370	0,9969	0,9999
8	0	0,9259	0,00132	0,9999	1,0000

Таким образом,

$$p(1, 1, 1) := P(f(B) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 1, \text{оц}(B) = 1, f(A) = 1) = P(f(B) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 0, \text{оц}(B) = 0, f(A) = 0);$$

$$p(1, 1, 0) := P(f(B) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 1, \text{оц}(B) = 1, f(A) = 0) = P(f(B) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 0, \text{оц}(B) = 0, f(A) = 1);$$

$$p(1, 0, 1) = P(f(B) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 1, \text{оц}(B) = 0, f(A) = 1) = P(f(B) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 0, \text{оц}(B) = 1, f(A) = 0);$$

$$p(1, 0, 0) = P(f(B) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 1, \text{оц}(B) = 0, f(A) = 0) = P(f(B) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 0, \text{оц}(B) = 1, f(A) = 1);$$

$$p(0, 0, 1) = P(f(B) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 0, \text{оц}(B) = 0, f(A) = 1) = P(f(B) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 1, \text{оц}(B) = 1, f(A) = 0);$$

$$p(0, 0, 0) = P(f(B) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 0, \text{оц}(B) = 0, f(A) = 0) = P(f(B) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 1, \text{оц}(B) = 1, f(B) = 1);$$

Параметров  $p(0, 1, y)$  нет, так как из проигранных за свой цвет позиций можно сделать только проигрывающие ходы.

Пусть  $P(x, y, n)$  — вероятности получить модельную оценку, равную  $|1 - \text{col } A|$ , при оценке начальной позиции  $A$ , равной  $|x - \text{col } A|$ , значении оценочной функции  $f(A) = |y - \text{col } A|$  и глубине модели  $n$ :

$$P(x, y, n) := P(\text{моц}_n(A) = |1 - \text{col } A| \mid \text{оц}(A) = |x - \text{col } A|, f(A) = |y - \text{col } A|);$$

т. е.

$$P(1, 1, n) := P(\text{моц}_n(A) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 1, f(A) = 1) = P(\text{моц}_n(A) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 0, f(A) = 0);$$

$$P(1, 0, n) := P(\text{моц}_n(A) = 1 \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = 1, f(A) = 0) = P(\text{моц}_n(A) = 0 \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = 0, f(A) = 1);$$

$$\begin{aligned}
P(0, 1, n) &:= P(\text{моц}_n(A) = 1 \mid \text{col } A = \\
&= 0, \text{ оц}(A) = 0, f(A) = 1) = P(\text{моц}_n(A) = \\
&= 0 \mid \text{col } A = 1, \text{ оц}(A) = 1, f(A) = 0); \\
P(0, 0, n) &:= P(\text{моц}_n(A) = 1 \mid \text{col } A = \\
&= 0, \text{ оц}(A) = 0, f(A) = 0) = P(\text{моц}_n(A) = \\
&= 0 \mid \text{col } A = 1, \text{ оц}(A) = 1, f(A) = 1);
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
P(x, 1, 0) &= 1, \\
P(x, 0, 0) &= 0 \quad (x = 0, 1).
\end{aligned}$$

Общую рекуррентную формулу для значений характеристик  $P(x, y, n+1)$  можно привести к виду

$$\begin{aligned}
1 - P(1, y, n+1) &= \\
&= (p(1, 1, y)P(0, 0, n) + (1 - p(1, 1, y))P(0, 1, n))^s \times \\
&\times (p(1, 0, y)P(1, 0, n) + (1 - p(1, 0, y))P(1, 1, n))^{n-s}, \\
1 - P(0, y, n+1) &= (p(0, 0, y)P(1, 0, n) + \\
&+ (1 - p(0, 0, y))P(1, 1, n))^m \quad (y = 0, 1).
\end{aligned}$$

Исследовать характер изменения вероятностей  $P(x, y, n)$  с ростом  $n$  в зависимости от значений вероятностных характеристик  $p(x_0, x_1, y)$  достаточно сложно, так как число последних велико (их 6). Поэтому общая картина нам не известна даже качественно. В табл. 5 приведены значения  $P(x, y, n)$  для  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  при некоторых системах значений  $p(x_0, x_1, y)$ . Расчеты производились для  $m = 10, s = 2$ .

Если при некоторой глубине  $n_0$  значение  $P(1, 0, n_0)$  оказалось близким к  $P(1, 1, n_0)$ , а  $P(0, 1, n_0) -$  к  $P(0, 0, n_0)$ , то для  $n > n_0$  по нашей рекуррентной формуле  $P(1, 1, n)$  и  $P(1, 0, n)$  будут близки к  $P_n$ , а  $P(0, 1, n_0)$  и  $P(0, 0, n) -$  к  $Q_n$  для модели без корреляции вероятностей значений оценочной функции  $f(B)$  в позициях  $B$  после ходов  $\Psi = (A, B)$  со значениями  $f(A)$  в позиции  $A$  до них, у которой  $P_{n_0} \approx P(1, 1, n_0) \approx P(1, 0, n_0)$ ,  $Q_{n_0} \approx P(0, 1, n_0) \approx P(0, 0, n_0)$ . Рассматриваемые вероятности  $P(1, 1, n)$  и  $P(1, 0, n)$  будут стремиться к 1, а  $P(0, 1, n)$  и  $P(0, 0, n) -$  к 0, когда при некоторой глубине  $n_0$  дерева модельной игры Шеннона точка в плоскости  $PQ$  с координатами  $P = P(1, 0, n_0)$ ,  $Q = P(0, 1, n_0)$  окажется в области

Вероятности правильных оценок для модельных игр Шеннона, когда значения оценочных функций в позициях  $B$ , возникающих после ходов  $\Psi = (A, B)$ , зависят от значений оценочных функций в позициях  $A$  до хода  $\Psi$

### Обозначения

$m$  — количество всех ходов из незаключительных позиций,  
 $s$  — количество выигрывающих ходов из выигранных незаключительных позиций,

$n$  — глубина модели,

$p(x, y, z)$  — вероятность того, что  $f(B)$  равно  $|1 - \text{col } A|$  при условиях:  $\text{оц}(A) = |x - \text{col } A|$ ,  $\text{оц}(B) = |y - \text{col } A|$ ,  $f(A) = |z - \text{col } A|$ ,

$P(x, z, u)$  — вероятность того, что  $\text{моц}(A)$  равно  $|1 - \text{col } A|$  при условиях:  $\text{оц}(A) = |x - \text{col } A|$ ,  $f(A) = |z - \text{col } A|$ .

Во всех примерах  $m = 10$ ,  $s = 2$ ,  $p(1, 1, 1) = p(1, 0, 1) = p(0, 0, 1) = 1$

$p(1, 1, 0) = 0,8, \quad p(1, 0, 0) = p(0, 0, 0) = 0,01$				
$n$	$P(1, 1, n)$	$P(1, 0, n)$	$P(0, 1, n)$	$P(0, 0, n)$
0	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
1	1,0000	0,9631	1,0000	0,0956
2	0,9932	0,9238	0,3135	0,0037
3	1,0000	0,9959	0,5474	0,0732
4	0,9950	0,9720	0,0398	0,0005
5	1,0000	0,9999	0,2469	0,0515
6	0,9974	0,9918	0,0007	0,0000
7	1,0000	1,0000	0,0790	0,0267
8	0,9993	0,9986	0,0000	0,0000
9	1,0000	1,0000	0,0137	0,0072
10	0,9999	0,9999	0,0000	0,0000

$p(1, 1, 0) = 0,6, \quad p(1, 0, 0) = p(0, 0, 0) = 0,01,$					$p(1, 1, 0) = 0,5, \quad p(1, 0, 0) = p(0, 0, 0) = 0,01$			
$n$	$P(1, 1, n)$	$P(1, 0, n)$	$P(0, 1, n)$	$P(0, 0, n)$	$P(1, 1, n)$	$P(1, 0, n)$	$P(0, 1, n)$	$P(0, 0, n)$
0	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
1	1,0000	0,8524	1,0000	0,0956	1,0000	0,7693	1,0000	0,0956
2	0,9975	0,7933	0,7976	0,0147	0,9989	0,7054	0,9274	0,0228
3	1,0000	0,8964	0,9013	0,0450	1,0000	0,7815	0,9695	0,0398
4	0,9992	0,8511	0,6650	0,0106	0,9998	0,7498	0,9150	0,0219
5	1,0000	0,9535	0,6912	0,0230	1,0000	0,7853	0,9439	0,0269
6	0,9997	0,8891	0,5305	0,0076	0,9999	0,7685	0,9109	0,0217
7	1,0000	0,9764	0,5694	0,0139	0,9999	0,7867	0,9281	0,0239
8	0,9999	0,9192	0,3786	0,0049	0,9999	0,7773	0,9092	0,0217

$p(1,1,0) = 0,6,$ $p(1,0,0) = p(0,0,0) = 0,01,$					$p(1,1,0) = 0,5,$ $p(1,0,0) = p(0,0,0) = 0,01$			
$n$	$P(1,1,n)$	$P(1,0,n)$	$P(0,1,n)$	$P(0,0,n)$	$P(1,1,n)$	$P(1,0,n)$	$P(0,1,n)$	$P(0,0,n)$
9	1,0000	0,9925	0,4281	0,0061	0,9999	0,7874	0,9194	0,0229
10	0,9999	0,9457	0,2128	0,0025	0,9999	0,7819	0,9084	0,0217
16	1,0000	0,9979	0,0001	0,0000				
20					0,9999	0,7872	0,9081	0,0217

$p(1,1,0) = 0,8,$ $p(1,0,0) = p(0,0,0) = 0,015$					$p(1,1,0) = 0,6,$ $p(1,0,0) = p(0,0,0) = 0,015$			
$n$	$P(1,1,n)$	$P(1,0,n)$	$P(0,1,n)$	$P(0,0,n)$	$P(1,1,n)$	$P(1,0,n)$	$P(0,1,n)$	$P(0,0,n)$
0	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
1	1,0000	0,9646	1,0000	0,1403	1,0000	0,8582	1,0000	0,1403
2	0,9853	0,9029	0,3029	0,0053	0,9942	0,7695	0,7832	0,0211
3	1,0000	0,9963	0,6398	0,1488	0,9999	0,9013	0,9271	0,0879
4	0,9785	0,9390	0,0363	0,0007	0,9966	0,8227	0,6462	0,0152
5	1,0000	0,9999	0,4668	0,2000	1,0000	0,9317	0,8579	0,0582
6	0,9600	0,9358	0,0005	0,0000	0,9981	0,8583	0,5070	0,0107
7	1,0000	1,0000	0,4851	0,3377	1,0000	0,9576	0,7831	0,0395
8	0,8859	0,8652	0,0000	0,0000	0,9989	0,8871	0,3514	0,0067
9	1,0000	1,0000	0,7650	0,7032	1,0000	0,9796	0,6982	0,0274
10	0,5056	0,4880	0,0000	0,0000	0,9994	0,9128	0,1866	0,0032
18					1,0000	0,9949	0,0000	0,0000

устойчивости, изображенной на рис. 36. Они будут все вместе попеременно приближаться то к 1, то к 0, если точка с координатами  $P = P(1, 1, n_0)$ ,  $Q = P(0, 0, n_0)$  окажется на некотором расстоянии от этой области.

Остановимся на оценке некоторых значений параметров  $p(x_0, x_1, y)$ , обеспечивающих рост достоверности модельных оценок при увеличении глубины  $n$  дерева рассматриваемой модели. Пусть  $p(1, 1, 1) = p(1, 0, 1) = p(0, 0, 1) = 1$ ,  $p(1, 1, 0) = 0,7$ ,  $p(1, 0, 0) = p(0, 0, 0) = 0,01$ . Равенство первых трех параметров 1 означает, что оценочная функция  $f(A)$  основана на весьма оптимистическом мнении о позициях  $B$  после любого хода из позиции  $A$ , для которой значение оценочной функции в пользу той стороны, чья очередь хода. Такова, например, чисто материальная оценочная функция, так

как на своем ходе мы не теряем материала. Значения  $p(1, 1, 0) = 0,7$  и  $p(1, 0, 0) = p(0, 0, 0) = 0,01$  означают, что примерно в 90% позиций со своей очередью хода, которые мы считаем плохими, правильное мнение возникает после перебора на глубину  $n = 1$ . Впрочем, рассматриваемая модель весьма приближенно соответствует ситуациям в реальных играх при фактически применяемых оценочных функциях.

Можно рассматривать аналогичную модель, в которой оценочная функция  $f(A)$  может принимать промежуточные значения между 0 и 1. Мы введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_{\pm}(x, y, z, n) &:= \\ &= P(\text{моц}_n(A) \geq z \mid \text{col } A = 0, \text{оц}(A) = x, f(A) = y) = \\ &= P(\text{моц}_n(A) \leq 1 - z \mid \text{col } A = 1, \text{оц}(A) = \\ &= 1 - x, f(A) = 1 - y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x_0, x_1, y_0, y_1) &:= \\ &= P(f(B) \leq y_1 \mid \text{col } A = 0, \Psi = (A, B) \in \\ &\in \mathfrak{A}, \text{оц}(A) = x_0, \text{оц}(B) = x, f(A) = y_0) = \\ &= P(f(B) \geq 1 - y_1 \mid \text{col } A = 1, \Psi = (A, B) \in \mathfrak{A}, \text{оц}(A) = \\ &= 1 - x_0, \text{оц}(B) = 1 - x_1, f(A) = 1 - y_2); \end{aligned}$$

Для такой модели общая рекуррентная формула имеет вид:

$$\begin{aligned} 1 - P_{\pm}(1, y, z, n + 1) &= \\ &= \left( \int_0^1 P_{\mp}(0, 1 - \eta, 1 - z, n) dp(1, 1, y, \eta) \right)^s \times \\ &\times \left( \int_0^1 P_{\mp}(1, 1 - \eta, 1 - z, n) dp(1, 0, y, \eta) \right)^{m-s}, \\ 1 - P_{\pm}(0, y, z, n + 1) &= \\ &= \left( \int_0^1 P_{\mp}(1, 1 - \eta, 1 - z, n) dp(0, 0, y, \eta) \right)^m. \end{aligned}$$

Содержащиеся в этих формулах интегралы являются интегралами Стильеса. При таком условии формула одинакова для случаев, когда оценочная функция  $f(A)$  может принимать все значения из отрезка  $[0, 1]$  или только конечное множество значений.

Расчеты по приведенным выше формулам имеют определенный смысл. Однако для качественных исследований можно использовать модели с двумя значениями оценочной функции  $f(A)$  (0 и 1). В таких моделях можно отразить разнообразные связи между значениями оценочной функции и свойствами позиций. Кроме значений  $f(A)$ , характеристики позиций могут зависеть от других параметров, например, от так называемой остроты позиции. Ниже мы приведем три примера, чтобы показать, как конструируются такие модели. В них влияние различных параметров будет рассматриваться по отдельности. Аналогичным образом можно конструировать комбинированные модели, в которых учитываются несколько параметров.

Пусть количество выигрывающих ходов в позициях зависит от значений оценочной функции  $f(A)$ . В простейшем случае из выигранных позиций  $A$  со значением  $f(A)=1$  можно сделать  $s_1$  выигрывающих ходов, а из выигранных позиций с  $f(A)=0$  — только  $s_2 < s_1$  таких ходов. Если значения  $f(B)$  оценочных функций зависят (вероятностным образом) только от истинных оценок позиций  $A, B$ , где  $A$  — позиция, из которой сделан ход  $\Psi=(A, B)$ , ведущий в позицию  $B$ , и значения  $f(A)$  оценочной функции для позиции  $A$ , а параметры  $p(x_0, x_1, y)$  имеют тот же смысл, что и во второй из рассматриваемых в этом параграфе моделей, то общая рекуррентная формула имеет вид:

$$\begin{aligned}
 1 - P(1, 1, n+1) &= \\
 &= (p(1, 1, 1)P(0, 0, n) + (1 - p(1, 1, 1))P(0, 1, n))^{s_1} \times \\
 &\times (p(1, 0, 1)P(1, 0, n) + (1 - p(1, 0, 1))P(1, 1, n))^{m-s_1}, \\
 1 - P(1, 0, n+1) &= \\
 &= (p(1, 1, 0)P(0, 0, n) + (1 - p(1, 1, 0))P(0, 1, n))^{s_2} \times \\
 &\times (p(1, 0, 0)P(1, 0, n) + (1 - p(1, 0, 0))P(1, 1, n))^{m-s_2}, \\
 1 - P(0, 1, n+1) &= \\
 &= (p(0, 0, 1)P(1, 0, n) + (1 - p(0, 0, 1))P(1, 1, n))^m, \\
 1 - P(0, 0, n+1) &= \\
 &= (p(0, 0, 0)P(1, 0, n) + (1 - p(0, 0, 0))P(1, 1, n))^m.
 \end{aligned}$$

Пусть позиции бывают спокойные и острые, причем каждой позиции  $A$  соответствуют три параметра, от

которых зависят вероятностные характеристики: цвет очереди хода col  $A$ , истинная оценка  $oc(A)$  и острота позиции  $\varphi(A)$  (для острых позиций  $\varphi(A)=1$ , для спокойных  $\varphi(A)=0$ ). В острых выигранных позициях есть, например, только один выигрывающий ход, который с вероятностью  $r_1$  ведет в острую позицию и с вероятностью  $1-r_1$  — в спокойную. Обе позиции, естественно, — проигранные для противника. Остальные ходы (их  $m-1$ ) ведут в выигранные противником позиции, острые с вероятностью  $r_2$  и спокойные с вероятностью  $1-r_2$ . Все ходы из острой проигранной позиции ведут в выигранные противником позиции, острые с вероятностью  $r_3$  и спокойные с вероятностью  $1-r_3$ . Для простоты мы предположим, что все ходы из спокойных позиций ведут в спокойные позиции, причем из спокойных выигранных позиций есть  $s > 1$  выигрывающих ходов.

Обозначим  $P(1, n)$  — вероятности правильно оценить острые выигранные позиции,  $P(0, n)$  — аналогичные характеристики для спокойных выигранных позиций,  $Q(1, n)$  и  $Q(0, n)$  — вероятности для острых и спокойных проигранных позиций быть принятыми за выигранные. Для всех определенных выше параметров  $n$  — глубина модели Шеннона, для начальной позиции которой оценка определяется по формуле Цермело. Общая рекуррентная формула для такой модели имеет вид:

$$1 - P(0, n+1) = Q^s(0, n) P^{m-s}(0, n),$$

$$1 - Q(0, n+1) = P^m(0, n),$$

$$1 - P(1, n+1) = (r_1 Q(1, n) + (1-r_1) Q(0, n)) \times \\ \times (r_2 P(1, n) + (1-r_2) P(0, n))^{m-1},$$

$$1 - Q(1, n+1) = (r_3 P(1, n) + (1-r_3) P(0, n))^m.$$

Нужно также задать начальные вероятности  $P(0, 0) = p_0$ ,  $P(1, 0) = p_1$ ,  $Q(0, 0) = q_0$  и  $Q(1, 0) = q_1$ .

Наконец, мы рассмотрим модель, в которой количества всех ходов из позиций и количества выигрывающих ходов из выигранных позиций могут быть различными. Мы снова для простоты ограничимся минимальным количеством параметров, от которых зависят вероятностные характеристики. Пусть такими параметрами являются только очередь хода col  $A$  и истинная оценка  $oc(A)$ . Рассмотрим следующие характеристики:  $\pi(m, s)$  —

вероятности того, что из выигранной позиции  $A$  можно сделать  $m$  ходов и  $s$  из них — выигрывающие,  $\rho(m)$  — вероятности того, что из проигранной позиции  $A$  можно сделать  $m$  ходов, естественно, проигрывающих. Таким образом,  $\pi(0, 0)$  и  $\rho(0)$  — соответственно вероятности для выигранных и проигранных позиций оказаться заключительными. Общая рекуррентная формула для нашей модели имеет вид:

$$1 - P_{n+1} = \pi(0, 0) + \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^m \pi(m, s) Q_n^s P_n^{m-s},$$

$$1 - Q_{n+1} = \sum_{m=1}^M \rho(m) P_n^m,$$

где  $M$  — максимальное количество ходов, которые можно сделать из позиций рассматриваемой игры, а  $P_n$  и  $Q_n$  имеют тот же смысл, что и для первой модели. Мы должны также задать начальные значения  $P_0 = p$  и  $Q_0 = q$ .

В заключение мы еще раз напоминаем, что аналогичными методами можно конструировать модели, в которых вероятностные характеристики зависят от всех рассмотренных нами параметров (в том числе, и от количества ходов, допустимых из рассматриваемых позиций), а также от нерассмотренных в этом параграфе.

## § 2. Построение моделей и определение способа вычисления модельных оценок на основе вероятностных предположений

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров\*), когда вероятности правильного определения оценок начальных позиций можно увеличить, заменив классическую модель Шеннона моделью, в которой ветки перебора имеют разные длины, или изменив способ вычисления модельных оценок позиций. Основные пути сокращения количества рассматриваемых при обходе позиций связаны со следующими соображениями:

1. Глубина перебора из позиций дерева модельной игры может зависеть от значений  $f(B)$  оценочных

---

\*) Примеры этого параграфа предложены Н. Э. Косачевой. Она же провела необходимые расчеты.

функций и других параметров, определяемых в рассматриваемых позициях  $B$ .

2. Для определения модельных оценок позиций можно не использовать формулу Цермело, а учитывать то обстоятельство, что из выигранных позиций  $B$  в позиции с благоприятными для стороны цвета  $\text{col } B$  значениями оценочной функции  $f(B)$  должен вести не один ход.

3. Вероятности разных ходов из данных позиций оказаться лучшими можно использовать не только для определения порядка обхода, но и для выбора его глубины.

Все эти возможности будут проиллюстрированы для случаев вероятностных предположений, по возможности, простого характера, чтобы можно было исследовать, к каким результатам они ведут. Однако, по-видимому, они применимы и в более сложных ситуациях, близких к реальным. Кроме того, рассматриваемые методы можно комбинировать.

Пусть значения оценочной функции  $f(B)$  для позиций  $B$ , возникающих после ходов  $\Psi = (A, B)$ , коррелированы с истинными значениями оценок позиций  $A, B$  и значениями оценочной функции  $f(A)$  для позиций  $A$ , из которых сделаны ходы  $\Psi$ . Таким образом, заданы вероятностные характеристики  $p_0(x_0, x_1, y)$ , определенные в предыдущем параграфе. При стандартных предположениях ( $m$  ходов из каждой незаключительной позиции  $A$ , из них  $s$  выигрывающих, если эта позиция — выиграна) для модели Шеннона, в которой все ветки просматриваются на одну и ту же глубину  $n$ , справедливы рекуррентные формулы

$$1 - P(1, y, n+1) = (p(1, 1, y)P(0, 0, n) + \\ + (1 - p(1, 1, y))P(0, 1, n))^s (p(1, 0, y)P(1, 0, n) + \\ + (1 - p(1, 0, y))P(1, 1, n))^{m-s},$$

$$1 - P(0, y, n+1) = (p(0, 0, y)P(1, 0, n) + \\ + (1 - p(0, 0, y))P(1, 1, n))^m,$$

причем  $P(x, 0, 1) = 1$ ,  $P(x, 0, 0) = 0$  ( $x = 0, 1$ ).

Если, например,  $p(1, 1, 1) = p(1, 0, 1) = p(0, 1, 1) = 1$ ,  $p(1, 1, 0) = 0,8$ ,  $p(1, 0, 0) = p(0, 0, 0) = 0,02$ ,  $m = 10$ ,  $s = 2$ , то значения  $P(x, y, n)$  для  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , приведены в табл. 6. Из нее видно, что уже при  $n_0 = 2$  точка  $(P(1, 1, n_0), P(0, 0, n_0))$  лежит вне области устой-

чивости, изображенной на рис. 36. Следовательно, вероятности  $P(x, y, n)$  не стремятся к желательным пределам, а все попеременно приближаются то к 0, то к 1. Однако приведенная выше рекуррентная формула справедлива не только для классической модели Шеннона.

Таблица 6

Изменение глубины перебора в зависимости от значений оценочных функций

Обозначения те же, что в табл. 5:

$$m=10, s=2, p(1, 1, 1)=p(1, 0, 1) p(0, 0, 1)=1, \\ p(1, 1, 0)=0,8, p(1, 0, 0)=p(0, 0, 0)=0,02.$$

Модель Шеннона $\mathfrak{A}_{SH, n}$					Модель $\mathfrak{A}_{NK, n}$			
$n$	$P(1, 1, n)$	$P(1, 0, n)$	$P(0, 1, n)$	$P(0, 0, n)$	$P(1, 1, n)$	$P(1, 0, n)$	$P(0, 1, n)$	$P(0, 0, n)$
0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000				
1	1,0000	0,9660	1,0000	0,1829				
2	0,9746	0,8807	0,2927	0,0068	1,0000	0,8807	1,0000	0,0068
3	1,0000	0,9967	0,7193	0,2414	1,0000	0,9586	0,7193	0,0236
4	0,9433	0,8865	0,0323	0,0008	0,9996	0,9737	0,3488	0,0084
5	1,0000	1,0000	0,7001	0,4491	0,9999	0,9943	0,2340	0,0091
6	0,7983	0,7507	0,0003	0,0000	0,9999	0,9971	0,0554	0,0017

Пусть мы построили модель, в которой глубина перебора для различных веток не одинакова, и определили для нее вероятности  $P(x, y)$  начальной позиции  $A$  с истинной оценкой  $оц(A) = |x - col A|$  и значением оценочной функции  $f(A) = |y - col A|$  иметь модельную оценку  $моц(A) = |1 - col A|$  (мы предполагаем, что для рассматриваемой модели естественные условия симметрии вероятностей выполняются). Поставим в соответствие рассматриваемой модельной игре  $\mathfrak{A}_\mu$  некоторое значение  $n_0$  параметра  $n$  формальной глубины перебора, например, максимальную глубину веток в дереве игры  $\mathfrak{A}_{\mu, n_0} = \mathfrak{A}_\mu$ . Тогда при  $n > n_0$  модельные игры  $\mathfrak{A}_{\mu, n}$  определяются следующим образом: их деревья состоят из всех позиций  $A_k$  дерева исходной игры  $\mathfrak{A}$ , имеющих ранги  $r(A_k) = k \leq n - n_0$ , ходов, ведущих в эти позиции, и поддеревьев  $\mathfrak{A}_{\mu, n_0}(A_n - n_0)$ . Начальные позиции последних

имеют ранг  $r(A_n - n_0) = n - n_0$ , а сами поддеревья образуются по правилам конструирования дерева модельной игры  $\mathfrak{M}_\mu$ . Легко видеть, что при  $n \geq n_0$  справедливы рекуррентные формулы, аналогичные приведенным выше:

$$\begin{aligned} 1 - P_\mu(1, y, n+1) &= \\ &= (p(1, 1, y) P_\mu(0, 0, n) + (1 - p(1, 1, y)) \times \\ &\quad \times P_\mu(0, 1, n))^s (p(1, 0, y) P_\mu(1, 0, n) + \\ &\quad + (1 - p(1, 0, y)) P_\mu(1, 1, n))^{m-s}, \\ 1 - P_\mu(0, y, n+1) &= (p(0, 0, y) P_\mu(1, 0, n) + \\ &\quad + (1 - p(0, 0, y)) P_\mu(1, 1, n))^m. \end{aligned}$$

Рассмотрим модельную игру  $\mathfrak{M}_{NK, 2}$ , в которой, если значение оценочной функции  $f(A)$  для начальной позиции  $A$  равно  $|1 - \text{col } A|$ , то она считается заключительной модельной оценкой  $\text{моц}_{NK, 2}(A) = f(A)$ , а в противном случае  $\mathfrak{M}_{NK, 2}(A)$  — дерево модельной игры Шеннона  $\mathfrak{M}_{SH, 2}(A)$  глубины 2. Ему принадлежат позиция  $A$ , все ходы из нее, позиции  $B_i$ , куда эти ходы ведут ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и все ходы игры  $\mathfrak{M}$  из позиций  $B_i$ , а позиции, куда последние ведут, считаются заключительными. Таким образом,

$$\begin{aligned} P_{NK}(1, 1, 2) &= P_{NK}(0, 1, 2) = 1, \\ P_{NK}(x, 0, 2) &= P_{SH}(x, 0, 2) \quad (x = 0, 1). \end{aligned}$$

Значения  $P_{NK}(x, y, n)$  для рассматриваемых значений параметров  $m, s, p(x_0, x_1, y)$  и  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  также приведены в табл. 6. При  $n = 6$  точка  $(P_{NK}(1, 0, n), P_{NK}(0, 1, n))$  попадает в область устойчивости, изображенную на рис. 36. Значит, при дальнейшем росте глубины перебора  $n$  вероятности  $P_{NK}(1, 1, n)$  и  $P_{NK}(1, 0, n)$  будут стремиться к 1, а  $P_{NK}(0, 1, n)$  и  $P_{NK}(0, 0, n)$  — к 0.

Правила построения моделей  $\mathfrak{M}_{NK, n}$  можно сформулировать так, чтобы они имели вид определяемых соображениями здравого смысла. При нечетной глубине  $n$  перебора из начальной позиции  $A_0$  нужно определить значения оценочной функции  $f(A_{n-2})$  для позиций  $(n-2)$ -го ранга. Если такое значение для нас (стороны цвета  $\text{col } A_0$ ) является плохим, то ему следует верить и не рассматривать ходов из соответствующих позиций  $A_{n-2}$ . В противном случае нужно произвести дополнительный перебор на глубину 2, чтобы уточнить предва-

рительное хорошее мнение о соответствующей позиции  $A_{n-2}$ . Однако такой здравый смысл не объясняет, почему при четном  $n$  следует доверять предварительному хорошему мнению о позициях  $(n-2)$ -го ранга и уточнять плохое.

Рассмотрим теперь некоторые возможности, связанные с отказом от определения модельных оценок незаключительных позиций по формуле Цермело. Некоторые авторы (см., например, [27]) предлагают определять модельную оценку позиции  $A$  как среднее значение нескольких лучших для стороны цвета  $\text{col } A$  модельных оценок позиций  $B_i$ , куда ведут ходы  $\Psi_i = (A, B_i)$  из  $A$ :

$$\text{моц}(A) := \begin{cases} \max_{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{1}{k} \sum_{h=1}^k \text{моц}(B_{i_h}), & \text{если в позиции ход белых;} \\ \min_{i_1, i_2, \dots, i_l} \frac{1}{l} \sum_{h=1}^l \text{моц}(B_{i_h}), & \text{если в позиции ход черных;} \end{cases}$$

Когда количества ходов  $k$  и  $l$  заданы, такой метод определения модельных оценок называется  $k, l$ -эвристикой. Однако можно менять значения  $k$  и  $l$  для позиций разных рангов рассматриваемого дерева модельной игры, а также в зависимости и от других обстоятельств.

Можно расширить класс предполагаемых формул, рассматривая взвешенное среднее и учитывая с некоторым весом значение  $f(A)$  оценочной функции для позиции  $A$ :

$$\text{моц}_n(A) := \begin{cases} \kappa_{0,0} f(A) + \sum_{i=1}^m \kappa_{0,i} \text{моц}(B_i), & \text{если в позиции ход белых;} \\ \kappa_{u,0} f(A) + \sum_{i=1}^m \kappa_{u,i} \text{моц}(B_i), & \text{если в позиции ход черных;} \end{cases}$$

где позиции  $B_i$ , возникающие после ходов  $\Psi_i = (A, B_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), упорядочены при ходе белых в позиции  $A$  в порядке убывания модельных оценок  $\text{моц}(B_i)$ ,

а при ходе черных в  $A$  — в порядке возрастания  $\text{moц}(B_i)$ . Предложенные выше формулы являются частным случаем. Для них

$$\kappa_{\delta, 0} = \kappa_{\alpha, 0} = 0, \quad \kappa_{\delta, 1} = \kappa_{\delta, 2} = \dots = \kappa_{\delta, k} = \frac{1}{k},$$

$$\kappa_{\delta, k+1} = \dots = \kappa_{\delta, m} = 0, \quad \kappa_{\alpha, 1} = \kappa_{\alpha, 2} = \dots = \kappa_{\alpha, l} = \frac{1}{l},$$

$$\kappa_{\alpha, l+1} = \dots = \kappa_{\alpha, m} = 0.$$

При использовании таких формул приходится вместо  $\alpha$ ,  $\beta$ -эвристики использовать более слабые правила отсечения, так как одного хода, ведущего из позиции  $A$  в позицию  $B$  с неблагоприятным для стороны цвета  $\text{col } B$  значением модельной оценки, недостаточно для того, чтобы получить хорошую модельную оценку позиции  $A$ . Такое увеличение количества рассматриваемых позиций может быть скомпенсировано уменьшением глубины  $n$ , достаточной для получения близких к 1 вероятностей  $P_n$  и  $1 - Q_n$  правильных модельных оценок для выигранных и проигранных позиций (за сторону цвета  $\text{col } A$ ). Вероятностные характеристики игры  $\mathfrak{A}$  могут быть такими, что применение формулы Цермело, вообще, не обеспечивает сходимости  $P_n$  к 1, а  $Q_n$  к 0, а применение более общих формул ее обеспечивает.

Модельные оценки, определяемые рассматриваемыми формулами, принимают промежуточные значения из интервала  $(0,1)$  даже в случаях, когда оценочная функция  $f(A)$ , как и истинная оценка  $\text{oc}(A)$ , принимает только значения 0 и 1. Поэтому вероятности различных значений модельных оценок определяются формулами, содержащими интегралы. Ниже будут приведены такие формулы для совершенно равномерной игры  $\mathfrak{A}_{m,N}$  с  $s$  выигрывающими ходами из выигранных за свой цвет позиций и значениями оценочной функции  $f(A)$ , являющимися независимыми друг от друга случайными величинами, зависящими вероятностным образом только от  $\text{oc}(A)$  и  $\text{col } A$ .

Пусть рассматривается модель Шеннона глубины  $n \ll N$  и для позиций ранга  $k$  определены вероятности

$$\begin{aligned} P_{\perp n, k}(z) &:= P\left(\left|\text{col } A - \text{moц}(A)\right| \geq z \mid \text{oc}(A) = \right. \\ &= |1 - \text{col } A|, r(A) = k); \quad Q_{\perp n, k}(z) := \\ &= P\left(\left|\text{col } A - \text{moц}(A)\right| \geq z \mid \text{oc}(A) = \text{col } A, r(A) = k); \end{aligned}$$

Значения  $P_{\pm n, n}(z)$  и  $Q_{\pm n, n}(z)$  определяются вероятностными характеристиками оценочной функции  $f(A)$ :

$$\begin{aligned} P_{\pm n, n}(z) &:= P(|\operatorname{col} A - f(A)| \geq z | \operatorname{oc}(A) = \\ &= |1 - \operatorname{col} A|, r(A) = n); \quad Q_{\pm n, n}(z) := \\ &= P(|\operatorname{col} A - f(A)| \geq z | \operatorname{oc}(A) = \operatorname{col} A, r(A) = n); \end{aligned}$$

Рекуррентные формулы для исследуемых вероятностей имеют вид

$$\begin{aligned} 1 - P_{\pm n, k-1} &= \\ &= \int_{\Omega_{\pm}(z)} \left| \prod_{i=1}^s dQ_{n, k}(\xi_i) \prod_{i=s+1}^m dP_{n, k}(\xi_i) dp_{k-1}(\xi_0) \right|, \\ 1 - Q_{\pm n, k-1} &= \int_{\Omega_{\pm}(z)} \left| \prod_{i=1}^m dP_{n, k}(\xi_i) dq_{k-1}(\xi_0) \right|, \end{aligned}$$

где  $\Omega_{\pm}(z)$  — область в  $(m+1)$ -мерном квадрате  $(0 \leq \xi_i \leq 1)_0^m$ , точки которой удовлетворяют условию

$$\kappa_0 \xi_0 + \sum_{h=1}^m \kappa_h (1 - \xi_{i_h}) \leq z$$

для любой перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$  (достаточно, чтобы оно выполнялось для перестановки, переводящей последовательность координат  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  в монотонно невозрастающую, функции множеств  $p_k(z)$  и  $q_k(z)$  в этой формуле — вероятности значений оценочной функции  $f(A)$ :

$$\begin{aligned} p_k(z) &:= P(|\operatorname{col} A - f(A)| \geq z | \operatorname{oc}(A) = \\ &= |1 - \operatorname{col} A|, r(A) = k); \\ q_k(z) &:= P(|\operatorname{col} A - f(A)| \geq z | \operatorname{oc}(A) = \operatorname{col} A, r(A) = k); \end{aligned}$$

Таким образом, вероятностные характеристики оценочной функции  $f(A)$  могут зависеть от ранга  $r(A)$  позиции  $A$ .

Приведенные выше формулы даже для простых вероятностных предположений достаточно сложны, и их исследование не производилось. Были рассмотрены более простые (для исследования, а не для применения) методы неминимаксного перебора, т. е. перебора с определением оценок незаключительных позиций не по формуле Цермело. Их исследование показывает, что имеется

принципиальная возможность получить лучшие результаты, чем при минимаксном переборе.

Пусть модельная оценка  $\text{моц}(A)$  незаключительной (в модели) позиции  $A$  равна  $|1 - \text{col } A|$ , когда  $l$  или больше ходов  $\Psi = (A, B)$  из нее ведут в позиции  $B$  с  $\text{моц}(B) = |1 - \text{col } A|$ , а остальные ходы ведут в позиции  $B$  с  $\text{моц}(B) = \text{col } A$ . Тогда для вероятностей  $P_{n,k-1}$ ,  $Q_{n,k-1}$  получить модельные оценки  $\text{моц}(A) = |1 - \text{col } A|$  соответственно в выигранных и проигранных за свой цвет позициях  $A$  ранга  $r(A) = k - 1$  справедливы рекуррентные формулы

$$1 - P_{n,k-1} = \sum_{g=0}^l \min(s, l-g) \sum_{h=0} C_s^h (1 - Q_{n,k})^h Q_{n,k}^{s-h} C_{m-s}^g (1 - P_{n,k})^g P_{n,k}^{m-s-g},$$

$$1 - Q_{n,k-1} = \sum_{g=0}^l C_m^g (1 - P_{n,k})^g P_{n,k}^{m-g}$$

(мы предполагаем, что  $l \leq m - s$ ). Модельные оценки позиций ранга  $k$  равны соответствующим значениям оценочной функции. Следовательно,

$$P_{n,n} = p := P(f(A) = |1 - \text{col } A| \mid \text{оц}(A) = |1 - \text{col } A|);$$

$$Q_{n,n} = q := P(f(A) = |1 - \text{col } A| \mid \text{оц}(A) = \text{col } A);$$

В дальнейшем мы рассмотрим возможность менять порог  $l$  для позиций  $A$  дерева модельной игры Шеннона, имеющих разные ранги. Когда же  $l$  постоянно, из приведенных формул следует, что вероятности  $P_n(l)$ ,  $Q_n(l)$  модельных оценок  $\text{моц}_n(A_0) = |1 - \text{col } A_0|$  для выигранных и проигранных начальных позиций удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$1 - P_{n+1}(l) = \sum_{g=0}^l \min(s, l-g) \sum_{h=0} C_s^h \times$$

$$\times (1 - Q_n(l))^h Q_n^{s-h}(l) C_{m-s}^g (1 - P_n(l))^g P_n^{m-s-g}(l),$$

$$1 - Q_{n+1}(l) = \sum_{g=0}^l C_m^g (1 - P_n(l))^g P_n^{m-g}(l).$$

Выведенные ранее рекуррентные формулы для случая минимаксного перебора получаются из этих формул при значении  $l = 0$ . Значения  $P_0(l) = p$ ,  $Q_0(l) = q$  определяются, как было указано выше. Они не зависят от  $l$ .

Пусть  $P_n(l) = 1 - \varepsilon$ ,  $Q_n(l) = \delta$ . Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= 1 - P_{n+1} = \\ &= \sum_{g=0}^l C_m^g \varepsilon^g (1 - \varepsilon)^{m-s-g} \left( \sum_{h=0}^{\min(s, l-g)} C_s^h (1 - \delta)^h \delta^{s-h} \right) = \\ &= C_s^{\min(l, s)} P'_{m, s, l}(\varepsilon, \delta) \delta^{\max(0, s-l)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta' &= Q_{n+1} = 1 - \sum_{g=0}^l C_m^g \varepsilon^g (1 - \varepsilon)^{m-g} = \\ &= \sum_{g=l+1}^m C_m^g \varepsilon^g (1 - \varepsilon)^{m-g} = C_m^{l+1} P''_{m, l}(\varepsilon) \varepsilon^{l+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon'' &= 1 - P_{n+2} = \\ &= C_s^{\min(l, s)} P'_{m, s, l}(\varepsilon', \delta') \delta'^{\max(0, s-l)} = \\ &= C_s^{\min(l, s)} (C_m^{l+1})^{\max(0, s-l)} P'_{m, s, l}(\varepsilon', \delta') \times \\ &\quad \times P''_{m, l}^{\max(0, s-l)}(\varepsilon) \varepsilon^{(l+1) \max(0, s-l)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta'' &= Q_{n+2} = C_m^{l+1} P''_{m, l}(\varepsilon') \varepsilon'^{l+1} = \\ &= C_m^{l+1} (C_s^{\min(l, s)})^{l+1} P''_{m, l}(\varepsilon') \times \\ &\quad \times P'^{l+1}_{m, s, l}(\varepsilon, \delta) \delta^{(l+1) \max(0, s-l)},\end{aligned}$$

где многочлен  $P'_{m, s, l}(\varepsilon, \delta)$  равен 1 при  $\varepsilon = \delta = 0$ ,  $P''_{m, l}(\varepsilon) = 1$  при  $\varepsilon = 0$ , и

$$0 \leq P'_{m, s, l}(\varepsilon, \delta) < 1,$$

$$0 \leq P''_{m, l}(\varepsilon) < 1 \quad (0 < \varepsilon \leq 1, 0 < \delta \leq 1).$$

Когда  $l < s$ , эти формулы дают

$$\varepsilon'' = C_s^l (C_m^{l+1})^{s-l} P'_{m, s, l}(\varepsilon', \delta') P''_{m, l}^{s-l}(\varepsilon) \varepsilon^{(l+1)(s-l)},$$

$$\delta'' = C_m^{l+1} (C_s^l)^{s+1} P''_{m, l}(\varepsilon') P'^{l+1}_{m, s, l}(\varepsilon, \delta) \delta^{(l+1)(s-l)},$$

а при  $l \geq s$

$$\varepsilon'' = P'_{m, s, l}(\varepsilon', \delta'),$$

$$\delta'' = C_m^{l+1} P''_{m, l}(\varepsilon') P'^{(l+1)}_{m, s, l}(\varepsilon, \delta).$$

Таким образом, если  $l \geq s$ , то  $P_n$  не стремится к 1,  $Q_n$  не стремится к 0 ни при каких значениях  $p$  и  $q$ . Так как для реальных игр количество  $s$  выигрывающих ходов в выигранных заключительных позициях не постоянно и важное значение имеют позиции, из которых можно сделать только один выигрывающий ход,

эффективность неминимаксного перебора по одинаковым формулам для всех позиций дерева рассматриваемой модели представляется сомнительной. Впрочем, все оценки этого параграфа основаны на сознательно упрощенных вероятностных предположениях о рассматриваемых играх. Нас интересуют новые подходы к построению моделей программируемых игр, определению модельных оценок и выбору ходов. Применение таких подходов требует дополнительного исследования при более реалистических вероятностных гипотезах и экспериментальной проверки.

Остановимся еще на вопросе, при каком значении  $l$  сходимость  $P_n(l)$  и  $Q_n(l)$  к желаемым пределам самая быстрая. Из приведенных выше формул следует, что, когда  $\varepsilon$  и  $\delta$  стали достаточно малыми, скорость сходимости определяется показателем степени при них  $(l+1)(s-l)$ . Последний максимален при  $l = \lceil (s-1)/2 \rceil$  (при четном  $s$  показатель степени одинаков при  $l = \lceil (s-1)/2 \rceil$  и  $l = \lfloor (s-1)/2 \rfloor$ , однако множители, стоящие перед  $\delta^{(l-1)(s-l)}$ , возрастают с ростом  $l$ ). Скорость сходимости следует определить и при других вероятностных предположениях. Кроме того, необходимо учитывать, что с ростом  $l$  увеличивается количество позиций в дереве обхода. Таким образом, сокращение глубины перебора, которое можно произвести, благодаря переходу к неминимаксному перебору с большим  $l$ , может не дать эффекта.

Некоторые значения  $P_0(l) = p$ ,  $Q_0(l) = q$ , не принадлежащие области сходимости, изображенной на рис. 36, принадлежат последней для неминимаксного перебора с некоторым  $l > 0$ . Пусть, например,  $m = 10$ ,  $s = 3$ ,  $p = 0,95$ ,  $q = 0,1$ . Результаты расчетов для  $l = 0, 1$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  приведены в табл. 7. Если  $P_{n+2}(l) < P_n(l)$  и  $Q_{n+2}(l) < Q_n(l)$ , то из наших рекуррентных формул следуют неравенства  $P_{n+3}(l) > P_{n+1}(l)$ ,  $Q_{n+3}(l) > Q_{n+1}(l)$ . И наоборот, если  $P_{n+2}(l) > P_n(l)$  и  $Q_{n+2}(l) > Q_n(l)$ , то из них следует, что  $P_{n+3}(l) < P_{n+1}(l)$  и  $Q_{n+3}(l) < Q_{n+1}(l)$ .

Следовательно, в случаях, когда при некотором  $n = n_0$  вероятности  $P_{n_0+2}(l)$  и  $Q_{n_0+2}(l)$  отклоняются от  $P_{n_0}(l)$  и  $Q_{n_0}(l)$  в одну и ту же сторону,  $P_n(l)$  и  $Q_n(l)$  не будут стремиться к желаемым пределам. Например, если  $P_{n_0+2}(l) > P_{n_0}(l)$ ,  $Q_{n_0+2}(l) > Q_{n_0}(l)$ , то при  $n =$

$= n_0 + 2k$  эти вероятности будут монотонно возрастать, а при  $n = n_0 + 2k + 1$  — монотонно убывать. Так ведут себя вероятности  $P_n(0)$  и  $Q_n(0)$  в нашем примере.

Т а б л и ц а 7

Различные способы вычисления модельной оценки

О б о з н а ч е н и я

$m$  — количество ходов из незаключительных позиций,

$s$  — количество выигрывающих ходов из выигранных незаключительных позиций,

$l$  — количество ходов из позиции  $A$  в позиции  $B$  с  $\text{моц}(B) = |1 - \text{col } A|$ , при которых  $\text{моц}(A) = |1 - \text{col } A|$ ,

$n$  — глубина перебора,

$P_n$  — вероятность значений  $\text{моц}_n(A) = |1 - \text{col } A|$ , когда  $\text{оц}(A) = |1 - \text{col } A|$ ,

$Q_n$  — вероятность значений  $\text{моц}_n(A) = |1 - \text{col } A|$ , когда  $\text{оц}(A) = \text{col } A$

$m = 10, s = 3$				
$l = 0$			$l = 1$	
$n$	$P_n$	$Q_n$	$P_n$	$Q_n$
0	0,9500	0,1000	0,9500	0,1000
1	0,9993	0,4013	0,9802	0,0861
2	0,9357	0,0070	0,9817	0,0159
3	1,0000	0,4855	0,9993	0,0137
4	0,8856	0,0000	0,9994	0,0000

Из формул, определяющих отклонения  $P_{n+2}(l)$  и  $Q_{n+2}(l)$  от желаемых пределов, при  $m = 10, s = 3, l = 1$  следуют неравенства

$$\varepsilon'' \leq 6075\varepsilon^4,$$

$$\delta'' \leq 405\delta^4$$

(равенство имеет место только в случаях, когда соответствующее отклонение  $\varepsilon$  или  $\delta$  равно 0). Значит, если  $0 \leq \varepsilon \leq \sqrt[3]{1/6075} \approx 0,0548$  и  $0 \leq \delta \leq \sqrt[3]{1/405} = 0,1352$ , то вероятности  $P_n(l)$  и  $Q_n(l)$  стремятся к желаемым пределам. Наши значения  $P_0(l) = p = 1 - \varepsilon = 0,95$  и  $Q_0(l) = \delta = q = 0,1$  принадлежат этой области сходимости.

Когда  $s = 2$ , самую быструю сходимость вероятностей  $P_n(l)$  и  $Q_n(l)$  дает минимаксный перебор, соответ-

ствующий значению  $l=0$ . Кроме того, область сходимости для  $l=1$  лежит внутри области сходимости для  $l=0$ , изображенной на рис. 36 (при  $l \geq 2$  вероятности  $P_n(l)$  и  $Q_n(l)$ , вообще, не сходятся к желаемым пределам). Однако при некоторых значениях  $p$  и  $q$  может оказаться полезным применять формулы неминимаксного перебора для определения модельных оценок позиций больших рангов. Пусть, например,  $m=10$ ,  $s=2$ ,  $P_{n,n}=p=0,95$ ,  $Q_{n,n}=q=0,005$ . Значения  $p$  и  $q$  лежат вне области сходимости, изображенной на рис. 36. Нет сходимости и при применении неминимаксного перебора с  $l=1$ .

Однако, если для определения модельных оценок позиций  $(n-1)$ -го ранга применять неминимаксную формулу с  $l=1$ , то вероятности  $P_{n,n-1}$  и  $Q_{n,n-1}$  будут равны соответственно 0,9937 и 0,0862. Точка  $(P_{n,n-1}, Q_{n,n-1})$  принадлежит области сходимости минимаксного перебора, изображенной на рис. 36, значит, модельные оценки  $\text{моц}(A_k)$  позиций  $A_k$  рангов  $r(A_k)=k < n-1$  можно определять по формуле Цермело, и при уменьшении  $k$  они будут приближаться к желаемым значениям.

Несколько сложнее нужно поступить, когда  $p=0,9995$ ,  $q=0,2$ . Точка  $(p, q)$  плоскости  $(P, Q)$  также лежит вне области сходимости, изображенной на рис. 36. Пусть рассматривается модель Шеннона глубины  $n$ . Если при определении модельных оценок позиций  $(n-1)$ -го ранга применять формулу Цермело, то  $P_{n,n-1}=0,9600$ ,  $Q_{n,n-1}=0,0050$ . Применение для позиций  $(n-2)$ -го ранга способа неминимаксного перебора с  $l=1$  дает  $P_{n,n-2}=0,9928$ ,  $Q_{n,n-2}=0,0581$ .

Для определения модельных оценок позиций меньших рангов следует применять обычную формулу Цермело.

В последних двух примерах еще лучшие результаты дает привлечение для определения модельной оценки позиции  $A$ , кроме значений модельных оценок  $\text{моц}(B)$  позиций  $B$ , возникающих после ходов  $\Psi=(A, B) \in \mathfrak{A}$ , значения оценочной функции  $f(A)$ . Рассмотрим, например, такое правило:

1) если два или большее количество ходов ведут из позиции  $A$  в позиции  $B$  с модельными оценками  $\text{моц}(B)=|1 - \text{col } A|$ , то  $\text{моц}(A)=|1 - \text{col } A|$ ;

2) если таких ходов нет, то  $\text{моц}(A) = \text{col } A$ ;

3) если же только один ход ведет в позицию  $B$  с модельной оценкой  $\text{моц}(B) = |1 - \text{col } A|$ , то  $\text{моц}(A) = f(A)$ .

При таком определении модельных оценок позиций  $k$ -го ранга модели Шеннона при условии, что на каждом из больших рангов модельные оценки позиций определяются одинаково, справедливы рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} 1 - P_{n,k} &= Q_{n,k+1}^s P_{n,k+1}^{m-s} + (s Q_{n,k+1}^{s-1} (1 - Q_{n,k+1}) \times \\ &\times P_{n,k+1}^{m-s} + (m-s) Q_{n,k+1}^s P_{n,k+1}^{m-s-1} (1 - P_{n,k+1})) (1-p), \\ 1 - Q_{n,k} &= P_{n,k+1}^m + m P_{n,k+1}^{m-1} (1 - P_{n,k+1}) (1-q). \end{aligned}$$

Так как обычно  $(1-p)$  — малая величина, а  $(1-q)$  более или менее близко к 1, то вероятность  $P_{n,k+1}$  близка к той, которая получается при минимаксном переборе, а  $Q_{n,k+1}$  — к получаемой при рассмотренном ранее способе, соответствующем значению  $l=1$ . Область сходимости вероятностей  $P_n$  и  $Q_n$  к желаемым пределам при применении предложенного способа для определения модельных оценок позиций всех рангов содержит часть, лежащую вне области сходимости соответствующих вероятностей для минимаксного перебора, изображенной на рис. 36. Например, при  $m=10$ ,  $s=2$  этой области принадлежит точка  $p=0,95$ ,  $q=0,15$ .

Теперь мы рассмотрим вероятностные предположения, связанные с упорядочением ходов исследуемой игры по ожидаемому их качеству. Пусть по-прежнему в исследуемой игре  $\mathfrak{A}$  белые и черные ходят по очереди, истинные оценки  $\text{оц}(A)$  и оценочная функция  $f(A)$  принимают только значения 0 и 1, а модельные оценки  $\text{моц}(A)$  позиций дерева модельной игры  $\mathfrak{A}_m$  определяются при помощи обычного дерева минимаксного перебора из значений  $f(F)$  оценочной функции для позиций  $F$ , заключительных в модели  $\mathfrak{A}_m$  (если  $F$  — заключительная позиция и в исходной игре  $\mathfrak{A}$ , то, естественно,  $f(F) = \text{оц}(F)$ ). Допустим, что выполняются следующие вероятностные предположения.

1. Условные вероятности  $p(F)$  и  $q(F)$  значений  $f(F) = |1 - \text{col } F|$  для заключительных позиций  $F$  модели  $\mathfrak{A}_m$  соответственно при условиях  $\text{оц}(F) = |1 - \text{col } F|$  и  $\text{оц}(F) = \text{col } F$  независимы между собой.

2. Независимы между собой для незаключительных позиций  $A \in \mathfrak{A}_\mu$  вероятности  $\pi(A, \Omega)$  того, что при условии  $\text{оц}(A) = |1 - \text{col } A|$  выигрывающими являются ходы  $\Psi = (A, B) \in \Omega \subset M(A)$ , и только они:

$$\pi(A, \Omega) := P(\text{оц}(B) =$$

$$= \begin{cases} |1 - \text{col } A|, & \text{если } \Psi \in \Omega \\ \text{col } A, & \text{если } \Psi \notin \Omega \end{cases} \mid \text{оц}(A) = |1 - \text{col } A|).$$

Из этих предположений следует, что условные вероятности  $P(A)$  и  $Q(A)$  значений  $\text{моц}(A) = |1 - \text{col } A|$  для незаключительных позиций  $A \in \mathfrak{A}_\mu$  соответственно при условиях  $\text{оц}(A) = |1 - \text{col } A|$  и  $\text{оц}(A) = \text{col } A$  независимы между собой, когда поддеревья  $\mathfrak{A}_\mu(A)$  не пересекаются, и равны

$$P(A) = 1 - \sum_{\Omega \in M(A)} \pi(A, \Omega) \prod_{\Psi = (A, B) \in \Omega} Q(B) \times \\ \times \prod_{\Psi = (A, B) \in M(A) \setminus \Omega} P(B),$$

$$Q(A) = 1 - \prod_{\Psi = (A, B) \in M(A)} P(B).$$

Для построения моделей  $\mathfrak{A}_\mu$  можно применять методы динамического программирования. Пусть определены условно оптимальные модели  $\mathfrak{A}_{p_i, q_i}(B_i)$  для позиций  $B_i$ , в которые ведут ходы  $\Psi_i = (A, B_i) \in M(A)$ , с вероятностями  $P(B_i) = p_i$ ,  $Q(B_i) = q_i$  и минимальным при выполнении этих равенств количеством позиций  $V(p_i, q_i, B_i)$ . Рассмотрим модель с деревом

$$\mathfrak{A}_\mu(A) = A \cup M(A) \cup \bigcup_{\Psi_i = (A, B_i) \in M(A)} \mathfrak{A}_{p_i, q_i}(B_i).$$

Для нее

$$P(A) = 1 - \sum_{\Omega \in M(A)} \pi(A, \Omega) \prod_{\Psi_i = (A, B_i) \in \Omega} q_i \times \\ \times \prod_{\Psi_i = (A, B_i) \in M(A) \setminus \Omega} p_i,$$

$$Q(A) = 1 - \prod_{\Psi_i = (A, B_i) \in M(A)} p_i,$$

$$V(\mathfrak{A}_\mu) = \sum_{\Psi_i = (A, B_i) \in M(A)} V(p_i, q_i, B_i) + 1.$$

Таким образом, для определения условно оптимальных моделей с минимальным количеством позиций  $\mathfrak{A}_{p,q}(A)$  при условиях, что  $p(A)=p$ ,  $q(A)=q$ , достаточно рассматривать только условно-оптимальные модели  $\mathfrak{A}_{p_i,q_i}(B_i)$  ( $\Psi_i=(A, B_i) \in M(A)$ ).

Правда, и таких моделей может оказаться слишком много. Однако, если мы согласны на приблизительную оптимальность, то количество конкурирующих моделей можно сократить. Например, можно рассматривать только такие модели  $\mathfrak{A}_{p_i,q_i}(B_i)$ , для которых количество позиций  $V(p_i, q_i, B_i)$  минимально при выполнении неравенств  $p_i \geq p$  или  $q_i \leq q$ . Можно также рассматривать такие модели не для всех значений  $p$  и  $q$ , а для некоторой более или менее частой сетки таких значений. Наконец, можно, несмотря на то, что множество значений  $p$  и  $q$ , для которых существуют условно экстремальные модели  $\mathfrak{A}_{p,q}(B_i)$ , являются дискретными, построить методами интерполяции непрерывные функции  $V(p, q, B_i)$  и использовать технику нахождения условных экстремумов функций многих переменных.

Вычисление значений  $P(A)$  по приведенной выше формуле также требует большого объема вычислений. Чтобы сократить его, можно ограничить количество множеств  $\Omega$  выигрывающих ходов, рассматривая лишь такие множества, для которых соответствующие вероятности  $\pi(A, \Omega)$  не слишком малы. Можно также использовать естественные предположения о значениях последних так, чтобы они определялись сравнительно небольшим количеством параметров. При таких предположениях вычисление  $P(A)$  сильно упрощается, и возникают возможности более эффективного применения методов динамического программирования.

Исследование методов сокращения перебора на основе тех или иных вероятностных предположений только начинается. Можно ожидать интересных новых результатов в этом направлении. В частности, большой интерес представляет комбинирование методов неминимаксного перебора, формирования моделей и использования апостериорной информации об уже полученных при переборе результатах. Важное значение имеют также статистические исследования, на основе которых нужно решать вопросы о применимости тех или иных

предположений о реальных играх, используемых оценочных функциях и других параметрах, определяющих характер позиций дерева модельной игры, а также о конкретных числовых значениях вероятностных характеристик.

### § 3. Несколько замечаний о правомерности вероятностного подхода

Обоснование выбора модельной игры и способа перебора при помощи вероятностных предположений, хотя бы и подтвержденных достаточной статистикой, для таких игр, как, например, шахматы, может встретить принципиальные возражения. Действительно, каждая шахматная позиция имеет истинную оценку, определенную детерминированным образом. Детерминированны также значения любых применяемых в моделях оценочных функций. Следовательно, вероятности каждого элементарного события, состоящего в том, что данная позиция  $A$  имеет значение истинной оценки  $\text{оц}(A) = x$ , или значение оценочной функции  $f(A) = y$ , или значение какого-либо детерминированным образом определенного параметра  $t(A) = t$ , могут быть равны только 0 или 1. Значит, вероятности любых сложных событий тоже равны 0 или 1 и связаны между собой детерминированным образом.

Аналогичным образом можно возразить против многих приложений теории вероятностей, к которым все уже давно привыкли. Разумеется, от этого такие возражения не становятся менее убедительными. Они волновали еще создателей теории вероятностей XVIII века. Тогда для обоснования приложений этой теории было высказано предположение о том, что события, управляемые достаточно сложными законами, во многих отношениях ведут себя, как случайные. Предложенный А. Н. Колмогоровым [20] алгоритмический подход к понятию сложности позволил в некоторой степени доказать такое предположение.

Мы не будем давать точного определения сложности по Колмогорову. Отметим лишь, что сложность конечного подмножества  $\Omega$  множества объектов  $\mathcal{M}$ , каждый из элементов которого имеет конечное описание, равна

длине самой короткой программы, генерирующей подмножество  $\Omega$ . Справедлива теорема о том, что значения достаточно простых функций  $\varphi(\Omega)$ , заданных на подмножествах множества  $\mathfrak{M}$ , для достаточно сложных подмножеств  $\Omega$  близки к соответствующим образом определенным вероятностям, если считать  $\Omega$  множеством случайных элементов.

В случае исследования результатов минимаксного перебора для модели Шеннона глубины  $n$  конечными подмножествами  $\Omega$  являются подмножества позиций дерева игры  $\mathfrak{M}$ , удовлетворяющих следующим условиям: их ранг равен  $n$ , истинная оценка равна заданному значению и они принадлежат данным поддеревьям модели Шеннона  $\mathfrak{M}_n$ . Однако такие множества не являются сложными по Колмогорову. Для их построения достаточно произвести обход всех позиций дерева игры  $\mathfrak{M}$ , определить оценки всех позиций и выделить соответствующие подмножества  $\Omega$ . Длина программы, выполняющей эти действия, сравнительно невелика.

Однако в развитие алгоритмического подхода к понятию сложности, предложенного Колмогоровым, было сформулировано другое определение сложности (см. [23]). В этом случае сложностью программы называется сумма ее длины и логарифма времени работы, а сложностью подмножества  $\Omega$  — минимальная сложность программы, генерирующей  $\Omega$ . Таким образом, известные алгоритмы определения истинных оценок оказываются сложными для большинства позиций, интересовавших человечество или игровые программы с момента изобретения шахмат (однако не для позиций из шахматных задач на мат в данное количество ходов). В то же время значения оценочных функций и модельных оценок при разных способах перебора являются сравнительно простыми функциями.

Для указанного понятия сложности справедливы теоремы о значениях простых функций от сложных подмножеств, формулируемые так же, как и теоремы для понятия сложности по Колмогорову. По-видимому, их достаточно для доказательства теорем о соотношениях между модельной и истинной оценками при условиях, что не существуют существенно более эффективные, чем известные в настоящее время, алгоритмы определения истинных оценок рассматриваемых позиций и справедливы

соответствующие соотношения между значениями оценочной функции и истинными оценками.

Если справедливо первое предположение, то для проверки второго обычные статистические приемы так же хороши или плохи, как для проверки любого вероятностного предположения. С самым первым предположением дело обстоит значительно хуже. Для его доказательства почти необходимо перебрать все алгоритмы желаемой эффективности и доказать, что ни один из них не оказался алгоритмом определения истинной оценки, т. е. найти позицию, оценка которой вычисляется этим алгоритмом неверно (точнее говоря, доказано, что почти для всех задач, которые в принципе можно поставить, дело обстоит именно так).

Таким образом, допустимость вероятностного подхода к определению объективного качества программы, использующей модельную игру, может быть обоснована только предположением об отсутствии достаточно простых алгоритмов, точно решающих задачу вычисления истинных оценок. При этом, чтобы были обоснованы методы какой-либо определенной сложности, успех которых хорошо подтверждается экспериментами, должны отсутствовать точные алгоритмы значительно большей сложности, а базисное предположение для такого обоснования, может быть, практически недоказуемо.

Подобная ситуация в дискретной математике уже встречалась. Выход из нее был найден в формулировке и доказательстве теорем условного характера. Например, для ряда задач было доказано, что они являются универсальными: для их решения либо не существует алгоритмов, время работы которых степенным образом зависит от размерности, т. е. длины описания конкретного варианта задачи, либо такие алгоритмы существуют для всех точно поставленных дискретных задач (описанием мы называем такое слово конечной длины, по которому объект, о котором ставится задача, однозначно восстанавливается, поэтому, если не ограничивать времени решения задачи, ее безусловно можно решить).

Условные теоремы о вероятностных моделях игры, может быть, будут иметь более оптимистический характер. Это будут теоремы о хорошем качестве определения истинных оценок позиций при помощи моделей при

условии, что справедливы точно формулируемые утверждения о некотором множестве объектов, имеющих конечные описания.

Однако, не дожидаясь формулировки и доказательства таких теорем, можно использовать вероятностный подход для построения новых типов модельных игр, способов перебора, алгоритмов вычисления оценочных функций и подбора параметров, определяющих работу игровых программ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ ПО ИГРОВОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Программирование игр как одна из основных задач искусственного интеллекта привлекло внимание многих исследователей. Цели их при рассмотрении возможности составления игровой программы или же при работе над такой программой весьма разные, соответственно разными являются их подходы к этой проблеме и полученные результаты.

На заре эры вычислительных машин, когда их мощь еще не была так очевидна, как сейчас, игра ЭВМ в различные игры неоднократно фигурировала как пример широких возможностей ЭВМ. Примеры таких рассмотрений можно найти в работах Дж. фон Неймана, О. Моргенштерна [129] и Н. Винера [165].

К. Шеннон посвятил возможности составления шахматной программы две статьи [39, 40], в которых была набросана схема алгоритма игровой программы. Схема настолько общая, что все программы, играющие сегодня в шахматы, являются реализациями этой схемы, естественно, с различными модификациями.

Почти в то же время А. Тьюринг [162], придумав в несколько более детальном виде ту же схему, что и Шеннон, предпринял попытку ручного моделирования игры шахматной программы по этой схеме. Так появилась первая партия якобы шахматной программы против довольно слабого оппонента (Мы оставляем результат этой и других партий шахматных программ за рамками нашего рассмотрения. Тексты большого количества партий шахматных программ, хорошо прокомментированных, можно найти в книге М. Ньюборна [131].)

В 1957 году в Лос-Аламосе была создана программа, игравшая в упрощенный вариант шахмат на доске  $6 \times 6$ , которая сыграла три партии. И, наконец, в 1958 г. А. Бернштейн и др. [68, 69] написали программу, игравшую в нормальные шахматы.

И хотя программа играла очень плохо, вопрос о возможности ЭВМ играть в шахматы был снят.

В начале 60-х годов было написано много программ для различных игр, в частности, домино [30], крестики-нолики [31], бридж [59] и др. Общее мнение было таково, что создание программ, играющих лучше сильнейших игроков, — вопрос техники и небольшого времени. Потребовалось несколько лет, чтобы стал очевидным тот факт, что для создания действительно сильных программ требуется довольно много работы.

Именно в это время родилась легенда, на наш взгляд неверная, но очень модная даже сегодня, что для создания сильной игровой программы необходим сильный игрок. Среди сторонников этой легенды есть люди, непосредственно занимающиеся программированием — М. М. Ботвинник [7—9], Г. Берлинер [67], А. Стейнер [32], М. Ньюборн, и люди, весьма далекие от программирования, зато признанные авторитеты в самой игре — М. Таль, Р. Фишер и другие.

Несмотря на то, что в нашей группе есть достаточно квалифицированные шахматисты, мы считаем (и надеемся, что эта книга достаточно красноречиво тому свидетельство), что программирование игр является разделом кибернетики, и для создания хорошо играющей программы требуется не меньше специфической работы над алгоритмами, чем знаний о конкретной игре. Последние иногда могут оказаться вредными, поскольку не всегда хорошо формализуются.

Вторая легенда состоит в том, что машина должна думать «по образу и подобию» мыслительной деятельности человека. Если рассматривать создание игровой программы как этап на пути к пониманию механизмов мышления у человека, то указанный выше тезис, безусловно, правилен. Однако, если видеть свою цель в том, чтобы научиться использовать ЭВМ для решения сложных интеллектуальных проблем, то мы неоправданно усложним работу, решая перед одной трудной задачей другую, может быть, еще более трудную.

Все эти легенды и многочисленные споры, которые ведутся по поводу программирования игр, происходят по той причине, что еще не устоялись методы и не определился предмет этой области. Есть только четкая цель — создать программу, играющую в популярную и сложную игру (чаще всего шахматы) гораздо лучше человека.

Заметная группа теоретиков исходит из попыток использования игровой программы для уточнения модели мышления человека. В основном, это психологи — А. Де Грут [88, 89], О. Тихо-

миров [34], Н. Чарнесс [77], исследующие механизмы игры человека в шахматы и пытающиеся воспроизвести их на программах.

В идейном отношении к работам этой группы примыкает работа Ботвинника [7—9]. Как средство построения сильной шахматной программы в ней фигурирует не моделирование человеческого мышления при игре в шахматы, а моделирование мышления самого Ботвинника (каким оно ему представляется). Эта работа выгодно отличается тем, что сопровождается фактическим программированием полученного таким образом алгоритма. Сейчас идет заключительная стадия создания программы, и стоит немного подождать с оценками, пока программа не начнет играть.

Основная группа теоретиков игрового программирования умозрительно строит концепции человеческого мышления во время игры и пытается подтвердить эти концепции созданием соответствующих алгоритмов. Большинство исследователей этой группы выбирает игры как модель интеллектуальной деятельности машины и проверяет эффективность общих алгоритмов на этой модели.

Первой такой работой была классическая сегодня программа «Общий решатель» А. Ньюэлла, Г. Саймона и Дж. Шоу [29] в 1958 г. Выдвинув гипотезу переборного мышления, авторы написали программу, реализовавшую общую переборную схему; одним из примеров содержательного наполнения этой схемы была программа, игравшая в шахматы.

Игры были избраны Д. Мичи [124] для модели разработки возможности представления знаний в машине. Эта работа имеет довольно характерный недостаток для всех работ этого направления.

В качестве модельной выбирается игра настолько тривиальная, что становятся неясными преимущества предложенной концепции. (За 25 лет существования проблемы искусственного интеллекта самой популярной моделью до сих пор остается головоломка «Ханойская башня».) У Мичи это эндшпиль «король и ладья против короля». Сейчас он заканчивает работу над более сложным эндшпилем «король и ладья против короля и коня».

Большая часть работ связана с применением методики распознавания образов для различных игр. В основном это работы, выражающие веру в необходимость включения такого рода процедур в игровые программы. Существует только одна программа, играющая в шахматы, используя распознавание. Это — программа А. Зобриста, Ф. Карлсона и К. Калма [168—170]. Она даже

участвовала в турнирах шахматных программ АСМ, но неизменно занимала предпоследнее место.

Большую часть работ составляют работы по обучению машин. Обучение применялось, например, в программе Х. Брутяна и др. [12] для игры в простых эндшпилях.

С обучением связывает успехи своей программы для игры в американские шашки А. Сэмюэль [33, 139]. Это еще одна легенда, так сказать, местного масштаба. Обучение в программе Сэмюэля сводилось к локальному изменению весов различных факторов в оценочной функции. Программа производила полный перебор на девять полуходов с исчерпывающим рассмотрением форсированных вариантов. По всей вероятности, такая глубина находится за пределами возможностей даже весьма квалифицированных игроков, и оценочная функция может варьироваться в широких пределах (лишь бы не была искажена картина в целом), не меняя выбираемого хода. Для сравнения укажем, что сильнейшие шахматные программы производят перебор на шесть полуходов.

Особняком стоит работа Г. Берлинера [62], в которой используется так называемый тактический анализатор — алгоритм, анализирующий тактические причины неудач предложенных программой планов и пытающийся найти пути преодоления этих неудач. Берлинер даже написал программу, включавшую этот алгоритм, но из-за неэффективного представления информации программа играла посредственно.

Эту же идею развил в программе для нахождения комбинаций Ж. Питр́а [137, 138]. Эта программа находит весьма впечатляющие комбинации. Единственное, но весьма важное упрощение, допущенное автором, состоит в том, что программа знает, что она должна выиграть, т. е. задание программе имеет вид — «найди комбинацию, выигрывающую качество».

Дж. Маккарти [122] использовал игру в шахматы как иллюстрацию модели здравого смысла.

Р. Гаджиев [13] применил принципы ситуационного управления для построения игры в шахматных эндшпилях.

Группа работ посвящена стратегическому перебору. Отметим только работы Р. Аткина [45, 46] (не путать с одним из авторов «Чесс-4»), Р. Бэнерджи [49, 50] и К. Черча и Р. Черча [79].

Остальные группы ищут собственно машинных путей решения. Уже Ньюэлл, Саймон и Шоу не удержались от введения в свою программу различных методов перебора, в частности,  $\alpha$ ,  $\beta$ -процедуру, без оглядки на то, пользуется ли человек подобными методами.

Характерной особенностью этого направления является то, что работа ведется на базе играющей программы. Это, к сожалению, не означает, что всякая играющая программа является базой серьезной работы. Заметная часть программ обязана своим существованием энтузиазму своих создателей и, в сущности, такие программы не вносят в теорию программирования игр ничего нового. Тем не менее большинство играющих программ, и в первую очередь сильно играющие программы, являются плодом серьезной научной работы.

Первый пример такого рода работы, на котором хотелось бы остановиться подробнее, — это программа для игры в одномастку А. Брудно и И. Ландау [11]. Создание программы сопровождалось теоретическими разработками.

Была доказана корректность всех применявшихся в программе методов сокращения перебора. В частности, была впервые обоснована  $\alpha$ ,  $\beta$ -процедура. Кроме того, программа обладала уникальной по сей день способностью сознательно ставить ловушки — из равноценных ходов выбирать ход с единственным правильным ответом противника. Вместе с высоким техническим уровнем программирования все это привело к созданию абсолютно непобедимой программы. Единственное, о чем можно пожалеть, — это то, что для такой серьезной работы была выбрана игра, в которую люди практически не играют, и лучшие качества программы остаются не оцененными по достоинству.

Интересный способ реализации схемы Шеннона для игры в шахматы вместе с рядом хорошо работающих эвристик был применен в шахматной программе ИТЭФ [2]. В этой же публикации содержится доказательство важного теоретического результата об оптимальности  $\alpha$ ,  $\beta$ -процедуры, если игра произвольна.

Большинство американских программ в 60-е годы [121] было основано на методе оценочных функций. В этом методе при переборе из промежуточной вершины рассматривались не все ходы, а только лучшие по некоторой оценочной функции. Обычно применялась функция оценки возникающей после хода позиции.

Лучшей программой, работавшей по этому принципу, была программа Р. Гринблатта [104], в которой ходы оценивались по существенно другой оценочной функции, связанной с характеристиками самого хода, а не возникающей после него позиции.

В настоящее время две сильнейшие в мире шахматные программы «Чесс-4» [153] и «Каисса» [15] основаны на серьезных теоретических разработках методов сокращения перебора. При этом в обеих программах тщательно избегаются отсечения, которые могут привести к изменению результата перебора.

Теория перебора привлекает также и других исследователей. Теоретические исследования  $\alpha$ ,  $\beta$ -процедуры проводили Д. Кнут [115] и М. Ньюборн [133].

Л. Харрис [108, 109] предложил несколько новых схем перебора, к сожалению, не подкреплённых программными разработками. Дж. Бирмингем и О. Кент [71], авторы сильнейшей западноевропейской программы «Мастер», разработали и реализовали в этой программе несколько интересных эвристик.

Здесь же хотелось бы устранить недоразумение, в основном терминологического характера. Сейчас уже принято называть полным перебор, проводимый без отсечений. Мы же все время подчеркиваем, что «Каисса» ведёт полный перебор, имея в виду то, что результаты перебора совпадают для всех позиций. Иначе говоря, программа не делает некорректных отсечений.

Переборное направление имеет свои недостатки. Основной из них, отмеченный Г. Берлинером [67], — приближительность получаемой модели. Когда выбраны параметры перебора, мы определяем лишь приближение шахматной игры. При переборе на маленькую глубину это приближение оказывается весьма грубым. С ростом глубины качество приближения, возможно, улучшается, но, по-видимому, не так быстро, как этого хотелось.

Хотелось бы отметить ещё одну работу в шахматном программировании. Э. Фредкин и Р. Гринблатт создали в МТИ специальный микропроцессор, реализующий техническую сторону шахматной игры. Таким образом, люди, имеющие идеи, как строить шахматные программы, но не желающие тратить годы на создание программы, доказывающей правоту их идеи, получают возможность проверять свои идеи в короткое время без тяжёлой рутинной работы. Опыт показывает, что без проверки на играющей программе невозможно определить плодотворность идеи.

Сейчас число играющих программ довольно велико. Регулярно проводятся турниры по играм «го» и «крестики-нолики». Турниры шахматных программ взяла под свою опеку ИФИП. Уже проведено два чемпионата мира, семь чемпионатов Северной Америки и чемпионат Европы. В табл. 8—11 приводится официальная информация об участниках чемпионатов мира, чемпионата Северной Америки 1975 г. и чемпионата Европы.

Материалы по программированию игр регулярно публикуются в журналах «Artificial Intelligence» (Голландия), «Man — Machine Studies» (США), «SIGART Newsletter» (США) и, кроме того, в трудах конференций по искусственному интеллекту, проходящих раз в два года.

І-й чемпионат мира среди шахматных программ 1974 г.  
С п и с о к у ч а с т н и к о в

Название	Авторы	ЭВМ	Место разработки	Страна
1. Каисса	Адельсон-Вельский, Арлазаров, Донской Слэйт, Аткин	ICL-4/70	Институт проблем управле- ния, г. Москва	СССР
2. Чесс-4. 0		CDC-6600	Северо-западный универси- тет, Иллинойс	США
3. Риббит	Пэрри, Хансен, Крук	Honeywell, 6060 ASEA	Университет Ватерлоо	Канада
4. Хаос	Рубен, Шварц, Вино- град, Берман, Тойкка Бислей	Univac 1110	Фирма «Юнивак»	США
5. Теч-2		PDP-10	Массачусетский технологи- ческий институт	США
6. Острич	Арнольд, Ньюборн	Data General Nova 2	Колумбийский университет	США
7. Франц	Вольф	Univac 494	Вычислительный центр, г. Грац	Австрия
8. Мастер	Кент, Бирмингем	IBM-370/195	Лаборатория «Атлас»	Англия
9. Билл	Билл	CDC-6400	Колледж королевы Марии, г. Оксфорд	Англия
10. Фридом	Баричелли	CDC Cyber-74	Университет г. Осло	Норвегия
11. Телль	Йосс	HP-2100	Высшая техническая школа, г. Цюрих	Швейцария
12. A16CHS	Принсен	GCS Alpha-16	«Интерн. Дата Системс»	Англия
13. Папа	Райна, Алмаши	CDC Cyber-73	Будапештский университет	Венгрия

Чемпионат Северной Америки среди шахматных программ 1975 г.  
Список участников

Название программы	Авторы	ЭВМ	Место разработки	Страна
1. Три Фрог 2. Чес 4. 4	Хансен, Калнек, Крук Слэйт, Аткин	Honeywell-6080 CDC-6400, CDC Cyber-170 Amdahl-470	Университет Ватерлоо Северо-Западный университет, Иллинойс Фирма «Амдал»	Канада США США
3. Хаос	Рубен, Шварц, Виноград, Берман, Тойкка	Data General Nova 2	Макгиллский университет	Канада
4. Острич	Ньюборн, Арнольд	IBM-370/165	Университет Дюка, Северная Каролина	США
5. Дюкчесс	Райт, Трускотт	IBM-370/165 IBM-370/158	Торонтский университет Южно-Калифорнийский университет	Канада США
6. Чьют 1.2 7. Тиро	Валенти, Вранешич Зобрист, Карлсон	SIGMA-7	Баккнелльский университет	США
8. Сорти	Беккер, Маммон, Андерсон, Манн, Иган, Свингль	IBM-360/67 Nova-1200 Univac 1110	Университет Альберта Университет Колорадо Фирма «Юнивак», г. С.-Поль	Канада США США
9. Вита 10. Итонн Шрджо 11. Блэк Найт	Марсланд Куртуа Согг, Мальцен, Лозоф, Проус	CDC Cyber-74	Миннесотский университет	США
12. Айрон Фиш	Бус, Мандшток			

## Первенство Европы среди шахматных программ 1976 г.

## Список участников

Название	Авторы	ЭВМ	Место разработки	Страна
1. Телль	Йосс	HP-2115	Высшая техническая школа, г. Цюрих	Швейцария
2. Дайя	Ян, Цаглер	TR-440	ВЦ им. Лейбница, г. Мюнхен	ФРГ
3. Шах MB 5.6	Рихтер	TR-4, TR-440	Институт информации, г. Гамбург	ФРГ
4. Орвелл 3	Нишше	Univac 1106/2	ВЦ университета, г. Фрай- бург	Швейцария
5. Фишер Шнайдер	Фишер, Шнайдер	TR-4, TR-440	Университет, г. Штутгарт	ФРГ
6. Самиль	Клейн, Крюгер	IBM-370/168	ВЦ Высшей школы Боннско- го университета	ФРГ
7. Проша	Хьюит, Аппельрат, Беле, Францен, Шульц, Шульц, Тешерс, Форнбергер	IBM-370/158	ВЦ ГХК, г. Дортмунд	ФРГ
8. Чарли	Кейл	Siemens 4004/45	Гимназиум св. Анны, г. Ауг- сбург	ФРГ

## Второй чемпионат мира среди шахматных программ 1977 г.

## Список участников

Название программы	Авторы	ЭВМ	Место разработки	Страна
1. Чесс-4. 6	Слэйт, Аткин	CDC Cyber-176	Северо-Западный университет, Иллинойс	США
2. Дюкчесс	Трускотт, Райт, Йенсен	IBM-370/165	Университет Дюка, Северная Каролина	США
3. Каисса	Адельсон-Зельский, Арлазаров, Донской	IBM-370/168	ВНИИСИ, г. Москва	СССР
4. Блиц 5	Хайат	Sigma 9	Университет Южного Миссисипи	США
5. Мастер	Бирмингем, Кент	IBM-370/168	Лаборатория Резерфорда, г. Харвелл	Англия
6. Телль	Йосс	DEC K 110	Высшая техническая школа, г. Цюрих	Швейцария

Название программы	Авторы	ЭВМ	Место разработки	Страна
7. Белл	Томпсон, Кондон	PDP-11	Лаборатория Белл, Нью-Джерси	США
8. Вита	Марсланд	Amdahl 470 V/6	Университет Альберта	Канада
9. Острич	Ньюборн, Арнольд	Supernova	Макгильский университет	Канада
10. Дарк Хорс	Ратсман	CDC-6600	Телефонная компания Эрикссона, г. Стокгольм	Швеция
11. БЦП	Билл	CDC-6400	Колледж королевы Марии, г. Лондон	Англия
12. Эльза	Цаглер	TR-440	Технологический университет, г. Мюнхен	ФРГ
13. Хаос	Александр, Макбрайт, Шварц, Тойкка, Берман, Виноград	Amdahl 470 V/6	Мичиганский университет	США
14. Блэк найт	Согг, Проус, Мальцен, Лебан, Адамс	Univac 1110	Сперри-Юнивак, Миннесота	США
15. Чьют 1. 2	Валенти, Вранешич	Amdahl 470V/6	Торонтский университет	Канада
16. БС'66'76	Светс	IBM-370/168	частное лицо	Голландия

## ЛИТЕРАТУРА

1. Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л. Методы усиления шахматных программ. — Проблемы кибернетики, 1974, 29, с. 167 — 168.
2. Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л., Битман А. Р., Усков А. В. и др. О программировании игры вычислительной машины в шахматы. — УМН, 1970, 25, Вып. 2, (152), с. 221 — 260.
3. Адельсон-Вельский Г. М., Ландис Е. М. Один алгоритм организации информации. — ДАН СССР, 1962, 146, № 2, с. 263 — 266.
4. Арлазаров В. Л., Футер А. Л. и др. Обработка больших массивов информации на примере анализа ладейного эндшпиля. — Программирование, 1977, № 4, с. 45 — 54.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.
6. Бонгард М. М. Проблема узнавания. — М.: Наука, 1967.
7. Ботвинник М. М. Алгоритм игры в шахматы. — М.: Наука, 1967.
8. Ботвинник М. М. Блок-схема алгоритма игры в шахматы. — М.: Сов. радио, 1972.
9. Ботвинник М. М. О кибернетической цели игры. — М.: Сов. радио, 1975.
10. Брудно А. Л. Грани и оценки для сокращения перебора вариантов. — Проблемы кибернетики, 1963, 10, с. 141 — 150.
11. Брудно А. Л., Ландау И. Я. Одномастка (программирование игровой задачи). — Проблемы кибернетики, 1965, 13, с. 141 — 160.
12. Брутян Х. К., Заславский И. Д., Мкртчян Л. В. О некоторых методах математического синтеза позиционных стратегий в играх. — Проблемы кибернетики, 1967, 19, с. 141 — 175.
13. Гаджиев Р. Э. Экспериментальное исследование процесса принятия решения человеком и его моделирование с помощью метода ситуационного управления (на примере шахматного эндшпиля). — М., 1975, с. 17 — 27. — (Труды 4-й Международной конференции по искусственному интеллекту, 10).
14. Гольфанд Я. Ю., Футер А. Л. Реализация дебютной справочной для шахматной программы. — Проблемы кибернетики, 1974, 29, с. 201 — 210.

15. Донской М. В. О программе, играющей в шахматы. — Проблемы кибернетики, 1974, 29, с. 169 — 200.
16. Евграфов М. А., Задыхайло И. Б. Некоторые соображения о программировании шахматной игры. — Проблемы кибернетики 1965, 15, с. 135 — 156.
17. Ершов А. П. О программировании арифметических операторов. — ДАН СССР, 1958, 118, № 3, с. 427 — 430.
18. Ефимов Е. И. Моделирование шахматных окончаний на основе автоматизации доказательства теорем. — Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн., 1977, № 2 с. 47 — 60.
19. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ, Т. 2. Получисленные алгоритмы. — М.: Мир, 1977.
20. Колмогоров А. Н. К логическим основам теории информации и теории вероятностей. — Проблемы передачи информации, 1969, 5, № 3, с. 3 — 7.
21. Комиссарчик Э. А., Футер А. Л. Об анализе ферзевого эндшпиля при помощи ЭВМ. — Проблемы кибернетики, 1974, 29, с. 211 — 210.
22. Кронрод В. А. Крестики-нолики на поле  $5 \times 5$ . — В кн.: О некоторых вопросах теоретической кибернетики и алгоритмах программирования. Новосибирск, 1971, с. 185 — 210.
23. Левин Л. А. Универсальные задачи перебора. — Проблемы передачи информации, 1973, 9, № 3, с. 115 — 116.
24. Майзлин И. Е. Об одном способе поиска информации и его применении для реализации на ЭВМ алгоритма нахождения критического пути. — ДАН СССР, 1964, 159, № 4, с. 761 — 763.
25. Минский М., Пейперт С. Перцептроны. — М., Мир, 1971.
26. Нейман Дж. фон. К теории стратегических игр. — В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961, с. 173 — 204.
27. Нильсон Н. Дж. Искусственный интеллект. Методы поиска решений. — М.: Мир, 1973.
28. Ньюэлл А., Саймон Г. GPS-программа, моделирующая процесс человеческого мышления. — В кн.: Вычислительные машины и мышление. М.: Мир, 1967, с. 283 — 301.
29. Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г. Программа для игры в шахматы и проблема сложности. — В кн.: Вычислительные машины и мышление. М.: Мир, 1967, с. 33 — 70.
30. Первин Ю. А. Об алгоритмизации и программировании игры в домино. — Проблемы кибернетики, 1960, 3, с. 171 — 180.
31. Срапян Ш. О., Тер-Микаэлян Т. М. Об одном методе оценки ситуации в крестики и нолики. — Проблемы кибернетики, 1963, 9, с. 171 — 176.
32. Стейпер А. М. BRIBIP-программа, осуществляющая торговлю в бридже. — М.: 1975, с. 145 — 171. — (Труды 4-й Международной объединенной конференции по искусственному интеллекту, 3).
33. Сэмюэль А. Некоторые исследования возможности обучения машин на примере игры в шашки. — В кн.: Вычислительные машины и мышление. М.: Мир, 1967, с. 71 — 111.
34. Тихомиров О. К., Познанская Е. Д. Исследование визуального поиска как средство анализа эвристик. — Вопросы психологии, 1966, 2, с. 39 — 53.

35. Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры. — В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961, с. 167 — 172.
36. Чикул В. М. Метод точечных баз для сокращения перебора вариантов. — Вопросы кибернетики и вычислительной математики, Ташкент, 1966, 5, с. 35 — 45.
37. Чикул В. М. Об эвристическом программировании интеллектуальных игр. — Вопросы кибернетики и вычислительной математики, Ташкент, 1968, 16, с. 54 — 72.
38. Чикул В. М. Универсальная эвристическая игровая программа. — В кн.: Конф. по теории автоматов и искусств. мышл. Ташкент, 1968, с. 11 — 13.
39. Шеннон К. Э. Машина для игры в шахматы. — В кн.: Шеннон К. Э. Работы по кибернетике и теории информации. М.: Физматгиз, 1956, с. 180 — 191.
40. Шеннон К. Э. Играющие машины. — В кн.: Шеннон К. Э. Работы по кибернетике и теории информации. М.: Физматгиз, 1956, с. 216 — 223.
41. Adelson-Velsky G., Arlazarov V., Donskoy M. On the structure of an important class of exhaustive problems and on ways of search reduction for them. — Advances in Computer Chess, 1977, 1, p. 1 — 6.
42. Adelson-Velsky G., Arlazarov V., Donskoy M. Some methods of chess play programming. — Artificial Intelligence, 1975, 6, p. 361 — 376.
43. Adelson-Velsky G., Arlazarov V., Donskoy M. More commentary on the Cichelli heuristics. — SIGART, 1974, 45, p. 12,
44. Advances in Computer Chess, Ed. Clarke M. — Edinburgh Univers. Press, 1977, V. 1.
45. Atkin R. H., Whitten I. H. A multidimensional approach to positional chess. — Int. J. Man-Machine Studies, 1975, 7, p. 727 — 750.
46. Atkin R. H., Hartston W., Whitten I. H. Fred CHAMP, Positional chess analyst. — Int. J. Man-Machine Studies, 1976, 8, p. 517 — 529.
47. Atkin R. H. Positional play in chess by computer. — Advances in Computer Chess, 1977, 1, p. 60 — 73.
48. Atkin R. H. Multidimensional structure in the game of chess. — Int. J. Man-Machine Studies, 1972, 4, p. 341 — 362.
49. Banerji R. B., Ernst G. W. Changes in representation which preserve strategies in games. — In: Proc. of IJCAI2, 1971, p. 651 — 658.
50. Banerji R. B. Game playing programs: An approach and an overviews. — См. [159], p. 21 — 58.
51. Baylor G. W., Simon H. A. A chess mating combinations program. — Proc. of AFIPS. SJCC, 1966, 28, p. 431 — 447.
52. Bell A. C. Techniques for playing the end game. — Computer Weekly, 1975, April 10.
53. Bell A. G. Computer chess experiments. — См. [84].
54. Bell A. G. Kalah on Atlas. — Machine Intelligence, 1967, 3, p. 181 — 194.
55. Bell A. G. How to program a computer to play legal chess. — Computer Journal, 1970, 13, № 2, p. 208 — 219.

56. Bell A. G. Games playing with computers.—L.: Allen Q. Univers., 1972.
57. Bellman R. Stratification and control of large systems with applications to chess and checkers.—Information Science, 1968, 1.
58. Bellman R. On the application of dynamic programming to the determination of optimal play in chess and checkers.—Proc. Natl. Academy of Sciences, 1965, 53.
59. Berlekamp F. Program for double dummy bridge problems.—Journal of ACM, 1963, 10, p. 357—364.
60. Berliner H. J. A new subfield of computer chess.—SIGART, 1975, 53, p. 20—21.
61. Berliner H. J. Computer chess.—SIGART, 1975, 55, p. 14—15.
62. Berliner H. J. A representation and some mechanisms for a problem solving chess program.—Cm. [44] 1, p. 7—29.
63. Berliner H. J. A comment on improvement of chess playing programs.—SIGART, 1974, 48, p. 16.
64. Berliner H. J. Outstanding performance by CHESS 4.5 against human opposition.—SIGART, 1976, 60, p. 12—13.
65. Berliner H. J. Man against machine 1974.—Firbush News, 1976, 6, p. 63—70.
66. Berliner H. J. Chess playing programs.—SIGART, 1969, 17, p. 19—20.
67. Berliner H. J. Some necessary conditions for a master chess program.—In: Proc. 3IJCAI, Stanford, 1973, p. 77—85.
68. Bernstein A., Roberts M. de V. Computers as chess player.—Scientific American, June 1958, 198, p. 96—105.
69. Bernstein A., Roberts M. de V., Arbuckle T., Belsky M. A. A chess playing program for the IBM 704 Computer.—In: Proc. WJCC, 1958, p. 157—159.
70. Binet A. Psychologie des grands calculateurs et des joueurs d'echecs.—P.: Hachette, 1894.
71. Birmingham J. A., Kent P. Tree-searching and tree-pruning techniques.—Cm. [44], 1, p. 89—107.
72. Bond A. H. Psychology and computer chess.—Cm. [84], p. 29—36.
73. Bond A. H. Descriptor index.—Cm. [84], p. 95—112.
74. Boos G., Cooper D., Gillogly J., Levy D., Raymond H., Slate D., Smith R., Mittman B. Computer chess programs: A panel discussion.—Proc. 1971 Annual ACM Conference 25, p. 97—102.
75. Bramer M. A. Computer chess: The knowledge approach.—Chess, 1976, 41, p. 347—349.
76. Bratko I., Trancig P., Trancig S. Some new aspects of chess board reconstruction experiments.—In: 3rd European meeting on Cybernetics and Systems. Reseach. Vienna, 1976.
77. Charness N. Human chess skill.—Cm. [78], p. 34—53.
78. Chess skill in man and machine/Ed. Frey P.—N. Y.: Springer-Verlag, 1977.
79. Church R. M., Church K. W. Plans, goals, and search strategies for the selection of a move in chess. Cm. [78], p. 131—156.

80. Cichelli R. J. Research progress report in computer chess. — SIGART, 1973, 41, p. 32—36.
81. Cichelli R. J. Preliminary testing of the effectiveness of the Cichelli Depth—2 and refutation heuristics. — SIGART, 1973, 42, p. 49—52.
82. Clarke M. R. B. A quantitative study of king and pawn against king. — Cm. [44], 1, p. 108—118.
83. Clarke M. R. B. Some ideas for a chess compiler. — In: Artificial and Human Thinking. Elsevier, 1973, p. 189—198.
84. Computer chess/Ed. Bell. — L., 1973.
85. Cooper R., Elithorn A. The organization of search procedures. — In: Artificial and Human Thinking. Elsevier, 1973, p. 199—213.
86. Coriat I. H. The unconscious motives of interest in chess. — Psychoanalytic Review, 1941, 28, p. 30—36.
87. De Groot A. D. Chess playing programs. — Proc. Kononkl. Nedrlands Akad. Wentensch. Ser. A—67, Amsterdam, 1964, p. 385—398.
88. De Groot A. D. Thought and choice in chess. — Hague: Mouton, 1965.
89. De Groot A. D. Perception and memory versus thought: some old ideas and recent findings. — In: Problem Solving. N. Y.: 1966.
90. Dutka J., King K., Newborn M. A review of the first United States computer chess championship. — SIGART, June 1971, 28, p. 14—23.
91. Eisenstadt M., Kareev Y. Towards a model of human game playing. — In: 3rd IJCAI, 1973, p. 458—463.
92. Elithorn A., Telford A. Computer Analysis of Intellectual Skills. — Int. J. Man-Machine Studies, 1969, 1, p. 189—209.
93. Elithorn A., Telford A. Game and problem structure in relation to the study of human and artificial intelligence. — Nature, 1970, 227, p. 1205—1210.
94. Euwe M. Computers and chess. — In: The Encyclopedia of Chess. St. Martin's Press, 1970.
95. Faster than thought/Ed. Bowden B. V. — L.: Pitman, 1953.
96. Findler N. V. Computer experiments on the formation and optimization of heuristic rules. — In: Artificial and Human Thinking. Elsevier, 1973, p. 177—188.
97. Frey P. An introduction to computer chess. — Cm. [78], c. 54—81.
98. Gillogly J. Reader commentary on the Cichelli heuristics. — SIGART, 1973, 43, p. 27—28.
99. Gillogly J. J. The Technology chess program. — Artificial Intelligence, 1972, 3, p. 145—164.
100. Good I. J. Dynamic probability, computer chess, and the measurement of knowledge. — Firbush News, 1976, 6, p. 43—62.
101. Good I. J. The mystery of GO. — New Scientist, 1965, 427, p. 172—174.
102. Good I. J. A five year plan for automatic chess. — Machine Intelligence, 1966, 2, p. 89—118.
103. Good I. J. Analysis of the machine chess game J. Scott (White), ICL—1900 versus R. D. Greenblatt, PDP—10. — Machine Intelligence, 1969, 4, p. 267—269.

104. Greenblatt R. D., Eastlake D. E., Crocker S. D. The Greenblatt chess program. — In: Proc. FJCC, 1967, p. 801—810.
105. Griffith A. K. Empirical exploration of the performance of the alpha-beta tree search heuristic. — In: IEEE Trans. on Computers, Jan. 1976, p. 6—10.
106. Griffith A. K. A comparison and evaluation of three machine learning procedures as applied to the game of checkers. — Artificial Intelligence, 1974, 5, 137—148.
107. Harris L. R. The heuristic search under conditions of error, and plan oriented play. — Artificial Intelligence, 1974, 5, № 3, p. 217—239.
108. Harris L. R. The bandwidth heuristic search. — In: Proc. 3IJCAI. Standford, 1973, p. 23—29.
109. Harris L. R. The heuristic search: An alternative to the alpha-beta minimax procedure. — Cm. [78], c. 157—166.
110. Hayes J. E., Levy D. N. The world computer chess championship. — Edinburgh University Press, 1976.
111. Hearst E. Man and Machine: Chess achievements and chess thinking. Cm. [78], p. 167—200.
112. Hunt E. B. Artificial intelligence. — N. Y., Academic Press, 1976.
113. Kent P. A Simple working model. — Cm. [84], c. 15—27.
114. Kister J. et al. Experiments in chess. — Journal of ACM, 1957, 4, № 2, c. 174—177.
115. Knuth D. E., Moore R. An analysis of alpha-beta pruning. Artificial Intelligence, 1975, 6, p. 293—326.
116. Kozdrowicki E. W., Licwinko J. S., Cooper D. W. Algorithms for a minimal chess player: A Blitz Player. — Int. J. Man—Machine Studies, 1971, 11, p. 141—165.
117. Kozdrowicki E. W., Cooper D. W. COKO III: The Cooper—Kozdrowicki chess program. — Int. J. Man—Machine Studies, 1974, 6, p. 627—699.
118. Kozdrowicki E. W. A practical application of machine learning: use of learning in an interpreter for a tree searching language. — In: Proc. IEEE Systems Science and Cybernetics Conf. San Francisco, 1968, p. 250—257.
119. Levy D. N. L. Computer chess—a case study on the CDC 6600. — Machine Intelligence, 1971, 6, p. 151—164.
120. Malik R. Observations. — Cm. [84], c. 89—94.
121. Marsland T. A., Rushton P. G. A study of techniques for game-playing programs. — Int. J. Computer Science, 1973, 4, № 2, p. 26—30.
122. McCarthy J. Programs with common sense. — In: Semantic Information Processing. The MIT Press, 1968, p. 403—418.
123. Michie D. ALL: A package for generating strategies from tables. — SIGART, 1976, 59, p. 12—15.
124. Michie D. King and rook against king: historical background and a problem on the infinite board. — Cm. [44], c. 30—59.
125. Michie D. On machine intelligence. — In: Edinburgh University Press, 1974, p. 31—49; 135—142; 186—192.
126. Mittman B. A brief history of computer chess tournaments: 1970—1975. — Cm. [78], c. 1—33.

127. Mittman B. First world computer chess championship at IFIP Congress. Stockholm, August 1974. — Communications of ACM, 1974, 17, p. 604.
128. Mittman B., Newborn M. Results of the fourth annual U. S. computer chess tournament. — SIGART, oct. 1973, 42, p. 36—48.
129. Neumann J. von, Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. — N. J.: Princeton Univers. Press, 1944.
130. Newborn M. M. A summary of the third United States computer chess championship. — SIGART, 36, Oct. 1972, p. 9—26.
131. Newborn M. Computer chess. — L.; Academic Press, 1975.
132. Newborn M. Peasant: An endgame program for kings and pawns. — Cm. [78], c. 119—130.
133. Newborn M. The efficiency of the alpha-beta search on trees with branch-dependent terminal node scores. — Artificial Intelligence, 1977, 8, p. 137—153.
134. Newell A., Simon H. A. Human problem solving. — Prentice—Hall, 1972.
135. Newell A., Simon H. A. Computer simulation of human thinking. — Science, 1961, 134, p. 2011—2017.
136. Nilsson N. J. A new method for searching problems and gameplaying trees. — In: Proc. of IFIP Congress, 1968 p. 1556—1562.
137. Pitrat J. Realisation of a general game-playing program. — In: Proc. of IFIP Congress, 1968, p. 1570—1574.
138. Pitrat J. A general game-playing program. — In: Artificial Intelligence and Heuristic Programming. Edinburgh University Press, 1971.
139. Samuel A. L. Some studies in machine learning using the game of checkers II—Recent Progress. — IBM Journal, 1967, 11, p. 601—617.
140. Samuel A. L. Programming computers to play games. — Advances in Computers, 1960, 1, p. 165—192.
141. Scott J. J. A chess playing program. — Machine intelligence, 1969, 4, p. 255—266.
142. Scott J. J. Lancaster vs MACKHAC. — SIGART, 1969, 16, p. 9—11.
143. Scurrah M. J., Wagner D. A. Cognitive model of problem solving in chess. Cognitive psychology, 1971, 2, p. 454—478.
144. Shannon C. E. A Chess playing machine. Scientific American, 1950, 182, p. 48—51.
145. Silver R. The group of automorphisms of the game of 3-dimensional tic-tac-toe. — American Math. Monthly, 1967, 74, p. 247—254.
146. Simon H. A., Simon P. A. Trial and error search in solving difficult problems: Evidence from the game of chess. — Behavioral Sci., 1962, 7, № 4, p. 425—429.
147. Simon H. A., Barenfield M. Information-processing analysis of perceptual processes in problem solving. — Psych. Rev. 1969, 76, p. 473—483.
148. Simon H. A., Chase W. G. Skill in chess. — American Scientist, 1973, 61, № 4.

149. Slagle J. R. Artificial Intelligence: The heuristic programming approach.—N. Y.: McGraw-Hill, 1971.
150. Slagle J. R., Dixon J. K. Experiments with some programs which search game trees.—Journal of ACM, 1969, 16, p. 189—207.
151. Slagle J. R., Bursky P. Experiments with a multi-purpose theorem-proving heuristic program.—Journal of ACM, 1968, p. 15, № 1, 85—99.
152. Slagle S. R. Heuristic search programs.—Cm. [159], c. 246—273.
153. Slate D. J., Atkin L. R. CHESS 4.5—The Northwestern university chess program.—Cm. [78], c. 82—118.
154. Smith R. C. The Schach chess program.—SIGART, 1969, 15, p. 8—12.
155. Soule S., Marsland T. A. Canadian computer chess tournament.—SIGART, 1975, 54 p. 12—13.
156. Tan S. T. A knowledge based program to play chess endgames.—Cm. [84], c. 81—88.
157. Tan S. T. The winning program.—Firbush News, 1975, 5, p. 38—45.
158. Tan S. T. Describing Pawn Structures.—Cm. [44], 1, c. 74—88.
159. Theoretical approaches to non-numerical problem solving/Ed. Banerji R. B., Mesarovic M. D.—In: Proc. of the IV Systems Symposium at Case Western Reserve Univ. N. Y.: Springer-Verlag, 1970.
160. Thorp E., Walden W. A partial analysis of GO.—Computer Journal, 1964, 7, p. 203—207.
161. Thorp E. A Computer-assisted study of GO on M x N Boards.—Cm. [159], c. 303—343.
162. Turing A. M. Digital computers applied to games.—In: Faster than Thought, 1953, p. 286—310.
163. Waterman D. Generalisation learning techniques for automating the learning of heuristics.—Artificial Intelligence, 1970, 1, p. 121—170.
164. Weizenbaum J. How to make a computer appear intelligent: Five-In-a-Row Offers No Guarantee.—Datamation, 1962, p. 24—26.
165. Wiener N. Cybernetics.—N. Y.: Wiley, 1948.
166. Wolf G. Implementation of a dynamic tree searching algorithm in a chess program.—In: Proc. ACM. Atlanta, 1973, p. 206—208.
167. Zielinski G. Heuristics for computer chess.—Applied Math and Physics Dept., Warsaw Tech. Univ., 1975.
168. Zobrist A. L., Carlson F. R. An advice taking chess computer.—Scientific American, June 1973, p. 92—105.
169. Zobrist A. L. A model of visual organization for the game of Go.—SJCC, 1969, p. 103—112.
170. Zobrist A. L., Carlson F. R. The USC chess program.—In: Proc. of ACM. Atlanta, 1973, p. 209—212.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вершина дерева 11  
— — концевая 11  
— — подчиненная 12  
Вес признака 58  
— фигуры 92  
— хода 127  
Ветка 12  
— критическая 19  
— псевдокритическая 135  
Веток разложение 139  
Влияния аксиомы 121  
— предикат 111  
— — точный 118  
— отношение 122  
Возможности фигур и пешек 164  
— — — — новые 165
- Дерево 11  
— «белое» 26  
— б-усеченное 13  
— игры 8, 12  
— модели игры 83  
— обхода 48  
— «параллельное» 117  
— «черное» 26  
— ч-усеченное 13  
Доски информации 102  
— описания позиции 101  
Дуга дерева 11  
— подчиненная 12  
Дуги конец 11  
— начало 11
- Игра активная (схема активной игры) 97  
— двух противников антагонистическая 7
- Игра с полной информацией 7  
— модельная (модель игры) 51  
— совершенно равномерная 47  
— тихая 94  
— форсированная 91  
Инцидентности отношения 129
- Кандидат в критическую ветку 35  
— в лучшие ходы 75  
Каскад 78  
«Катастрофа» 53  
Контрстратегия 104  
Корень дерева 11  
— — игры 8
- Логика пороговая 59
- Мажорирование строгое 139  
Материальный проигрыш хода 181  
Метод аналогий 9, 109  
— выбора хода 52  
— — — точный 52  
— — — эвристический 52  
— граней и оценок ( $\alpha$ ,  $\beta$ -эвристика) 8  
— построения модели семантический 90  
— — — формальный 85  
Модели вероятностные 193  
Модель игры (модельная игра) 51  
— — эквивалентная 84  
— — Н. Косачевой 215

Модель игры Шеннона 54  
Модельная игра (модель игры)  
51

Обход позиций (перебор позиций) 21  
— — «вперед — назад» 22  
— — оптимальный 44  
— — полный 22  
— — с отсечениями 63  
Операции с досками теоретико-множественные 103  
Оценка позиции 13  
— — модельная 194  
— — частичная 24  
— — *D* значительно хуже для цвета col B, чем оценка позиции E 123

Партии результат 13  
Партия 13  
Перебор позиций (обход позиций) 21  
Перебора глубина 53  
Поддерево 12  
Подход вероятностный 9, 193  
Позиция 6, 12  
— выигранная 112  
— заключительная 12  
— начальная 12  
—, недопустимая для белых 33  
—, — — противника 43  
—, — — своего цвета 43  
—, — — черных 33  
— очередная 28  
—, полученная в результате параллельного переноса 131  
— проигранная 112  
— с ходом белых 7, 12  
— — — черных 7, 12  
Поле доски 101  
— — дополнительное 109  
Полуход 53  
Порядок обхода (перебора) 63  
Правило конца просмотра 29  
— отсечения 29  
— углубления 29  
Признак позиции 53  
— — доминирующий 61  
— — позиционный 61

Сжатие позиции игры в крестики-нолики 80  
Ситуации 1—5 113  
Служба лучших ответов 77  
— — ходов 73  
Справочная 80  
— плохих ходов 181  
— — — запасная 189  
— текущая 80  
Стратегии в смысле Дж. фон Неймана результат 16  
Стратегия активная 104  
— в смысле Дж. фон Неймана 16  
— выигрыша материала 99  
— достижения промежуточной цели 101  
— защиты от атаки на короля 104  
— открытой линии 102  
— пешечного продвижения 102  
— слабого пункта 102  
— центра (развития) 102  
— элементарная 101  
Схема абсолютная 94  
— активная (активная игра) 97

Тестовый коррелированный вариант 191

Угроза 182  
Учитель 62

Фрагмент 181  
—, приписанный к позиции 181  
Функция оценочная 53  
— — линейная 58  
— — материальная 92  
— — позиционная 92  
— упорядочивающая 85

Характеристики позиции вероятностные 193  
Ход 12  
— активный 97  
— аналогичный (один и тот же в разных позициях) 9, 100  
— виртуальный 110  
— выигрывающий 112  
— допустимый (реальный) 111  
— закрывающий 42

Ход защитный 100  
— лучший 19  
— — пассивный 97  
— назад 81  
— очередной 29  
— плохой 42  
— проигрывающий 133  
— противника 163  
— пустой 83  
— разрешенный 83  
— свой 163  
— улучшающий 42  
— форсированный 91  
— форсирующий 91

Цвет (позиции, хода) 123

Цель игры промежуточная 95

Шаг вперед 23

— назад 23

— обхода 28

Элемент дерева 11

$A$ -поддерево 12

— открытое 12

$k^0$ -угроза 182

$k^1$ -угроза 190

$k^2$ -угроза 191

$l^0$ -плохой ход 182

$l^1$ -плохой ход 191

$\alpha$ ,  $\beta$ -эвристика (метод граней и оценок) 8

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\text{оц}(A)$	13	$\{T_{\gamma}(k^0)\}$	184
$\text{моц}(A)$	194	$\{T_{\gamma}(l^0)\}$	184
$\text{чоц}(A)$	24	$\{T_{\gamma}(\lambda)\}$	184
$\text{col } A$	123	$\{T_{\Sigma}\}$	185
$\text{col } k^0$	184	$\gamma$	48
$\text{col } l^0$	185	$\delta$	48
$\text{col } \Lambda$	123	$\varepsilon$	48
$\text{col } \lambda$	164	$\Theta_0(k^0)$	184
$\text{col } \Psi$	123	$\Theta_1(k^0)$	184
$f(A)$	54	$\Theta_0(l^0)$	184
$f_{\text{м}}(A)$	92	$\Theta_1(l^0)$	184
$f_{\text{п}}(A)$	92	$\mu \preceq_{\text{col } B} \nu$	123
$f_{\text{пор}}(A)$	85	$\mu \succ_{\text{col } B} \nu$	123
$\text{fin}(B, \Lambda)$	123	$\pi(A, \Omega)$	226
$G(B, \Lambda_1, \Lambda_2)$	169	$\Pi'_{m, s, l}(\varepsilon, \delta)$	221
$h_{\text{лф}}$	181	$\Pi''_{m, l}(\varepsilon)$	221
$h_{\text{п}}$	181	$\varphi(\Omega)$	166
$h(\Psi)$	184	$\chi(\Omega)$	167
$\text{init } \Lambda$	141	$\mathfrak{A}$	12
$\lim$	32	$\mathfrak{A}_{\delta}$	18
$\overline{\lim}$	32	$\mathfrak{A}_{\text{форс}}(B)$	96
$L \diamond \mathfrak{B}$	129	$\mathfrak{A}_q$	25
$m_{\oplus}$	127	$\mathfrak{A}(B)$	20
$M(A)$	123	$\mathfrak{A}_{k, m}$	47
$\text{Mat}(k^0)$	184	$\mathfrak{A}_{NK, n}$	215
$\text{Mat}(l^0)$	184	$\mathfrak{A}_{p, q}(B)$	226
$P(\tilde{\delta} \mid \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \dots, \tilde{\delta}_h)$	194	$\mathfrak{A}_{SH, n}$	215
$R(\Lambda)$	131	$\mathfrak{A}_{\mu, n}$	215
$S(A)$	130		
$V(p, q, B)$	226		

§ 37

$\mathfrak{E}_T(B)$  130

$\mathfrak{E}(B)$  130

$\mathfrak{U}_f$  24

$\mathfrak{U}_p$  24

$\mathfrak{B}(A)$  24

$\mathfrak{B}(A)$  16

Доски информации:

$\text{Гр}(A)$  28

$\text{гр}(A)$  28

$\Pi, \Phi$  165

$b(A, \mu)$  164

$C(\Psi)$  175

$C'_{\mathfrak{C}, u}(\Psi)$  175

$E(\Psi)$  163

$I(\Psi)$  163

$N_c(\lambda)$  175

$n_{p, b}(\lambda, \mu)$  165

$N(\lambda, \mu)$  165

$P(A, \mu)$  164

$p(A, \mu)$  164

$Q(\Psi)$  175

$R(\Psi)$  175

$S(\lambda, \mu)$  175

$T^{(0)}(B)$  178

$T^0(L)$  178

$T^\times(L)$  178

$W(\Psi)$  163

$\overline{W}(\Psi)$  175

$E(c, \mathfrak{U}); I(c, \mathfrak{U}); W(c, \mathfrak{U})$  164

$E(s, \mathfrak{U}); I(s, \mathfrak{U}); W(s, \mathfrak{U})$  164

Количество позиций в дереве  
обхода:

$\mu_n$  45

$\gamma_n$  46

$h_n$  46

$e_k$  43

$f_k$  43

$g_k$  43

Множества позиций дерева  
обхода:

$E$  43

$E_k$  43

$F$  43

$F_k$  43

$G$  43

$G_k$  43

$\text{моц}_n(A)$  194

Отношение влияния (символ  $\sim$ ):

$\Lambda \sim \Psi$  122

$\Lambda_1 \sim \Lambda_2$  122

$\Lambda \sim \mathfrak{B}$  130

$\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$  130

Параметры, определяющие ве-  
роятностные характеристики:

$q(A)$  194

$r(A)$  194

$\chi(A)$  193

Предикаты влияния:

$\text{Inf}(B, C, D)$  117

$\text{Inf}(B, C, \mathfrak{A}(B))$  117

$\text{Inf}(B, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$  121

*Георгий Максимович Адельсон-Вельский*  
*Владимир Львович Арлазаров*  
*Михаил Владимирович Донской*

## ПРОГРАММИРОВАНИЕ ИГР

(Серия: «Библиотечка программиста»)

М., 1978 г., 256 стр. с илл.

Редактор *Т. И. Кузнецова*

Технический редактор *Л. Р. Лихачева*

Корректор *Е. В. Сидоркина*

ИБ № 2286

Сдано в набор 30.03.78. Подписано к печати 21.08.78. Т-13053. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 13,85. Тираж 34 000 экз. Заказ № 1882. Цена книги 90 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

90 н.

